Master M1: module optique solaire

Rappels d'optique géométrique; lunettes et télescopes

I – Ondes planes

Une onde plane monochromatique est caractérisée par son champ électrique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i(k.r - \omega t)}}$$

Sa fréquence, sa période, ou sa pulsation : $\omega = 2\pi / T = 2\pi \nu$ ne dépendent pas du milieu traversé.

Sa **vitesse de phase** dans le milieu traversé est: $v = \omega / k$
Sa **vitesse de groupe** dans le milieu traversé est: $V_g = d\omega / dk < C$

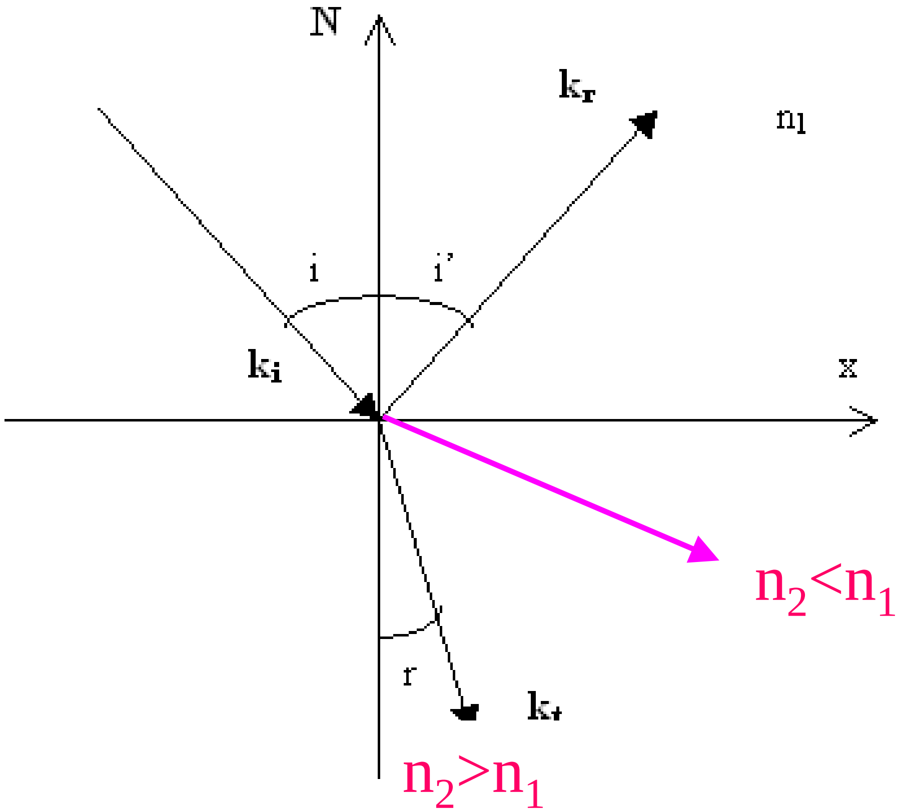
La **longueur d'onde** dépend du milieu traversé : $\lambda = v\ T = v / \nu$; dans le vide, $\lambda = \lambda_0 = C\ T$
Il en est de même pour le **vecteur d'onde** $k = 2\pi / \lambda$

L'indice de réfraction du milieu est défini par $n = C / v$, on en déduit que $\lambda = \lambda_0 / n$ et $k = 2\pi\ n / \lambda_0$

On a aussi $n = (\varepsilon / \varepsilon_0)^{1/2} = (\varepsilon_r)^{1/2}$ avec ε permittivité du diélectrique traversé (ε_0 pour le vide)

II - Lois de Descartes

Sont basées sur la conservation de la projection du vecteur d'onde $\mathbf{k_x}$ sur l'interface de séparation des milieux, selon la figure ci dessous :



Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence $(\mathbf{k_i}, \mathbf{N})$

Le rayon transmis est dans le plan d'incidence $(\mathbf{k_i}, \mathbf{N})$

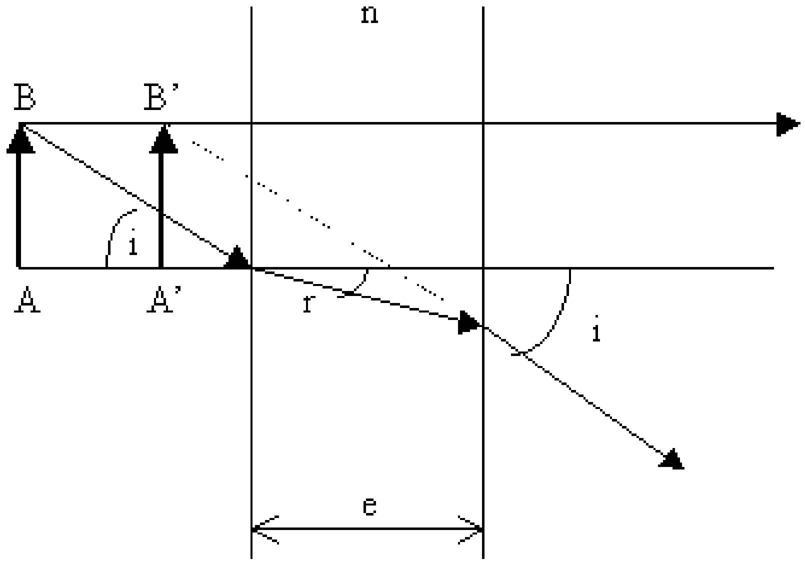
$i = i'$

$n_1 \sin i = n_2 \sin r$

$v_1 = C / n_1$; $v_2 = C / n_2$; $\lambda_1 = v_1 / \nu = \lambda_0 / n_1$; $\lambda_2 = v_2 / \nu = \lambda_0 / n_2$

Angle limite :
Lorsque $n_2 < n_1$ alors il existe un angle limite i_l tel que $\mathbf{\sin i_l = n_2 / n_1}$ au delà duquel il y a réflexion totale.

III - Lame à faces parallèles



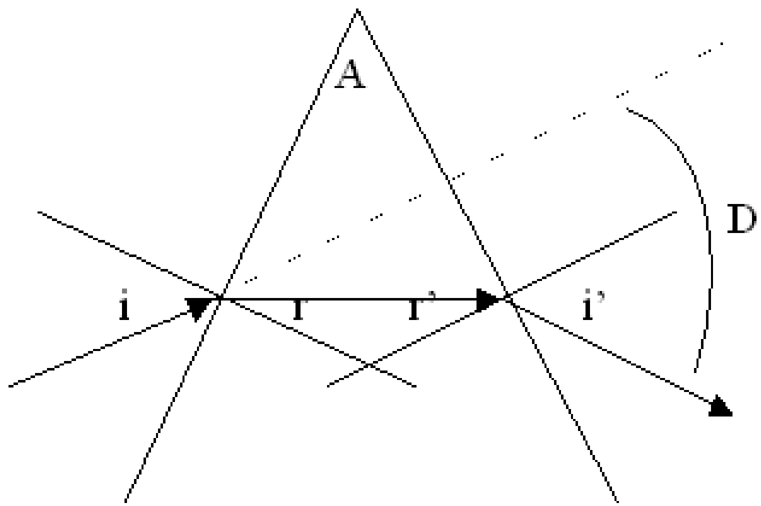
$AA' = e\,(1 - (\mathrm{tg}\,r / \mathrm{tg}\,i))$

Avec $\sin i = n \sin r$

Pour i petit :

$AA' = e\,(1 - (1/n)) = Cte$

IV - Prisme d'indice n



$r + r' = A$
$\sin i = n \sin r$
$n \sin r' = \sin i'$
$D = i + i' - A$

Condition du minimum de deviation D_m:
$i = i'$ et $r = r' = A/2$
$D_m = 2i - A$
$D_m = 2\arcsin(\mathbf{n} \sin(A/2)) - A$

n dépend de λ (n=a+b/λ²) !

Le dioptre sphérique en optique paraxiale :

Considérons un dioptre sphérique de centre C et de sommet S séparant deux milieux d'indice de réfraction n et n'.
On a les relations de conjugaison en optique paraxiale (telle que **d/R << 1**):

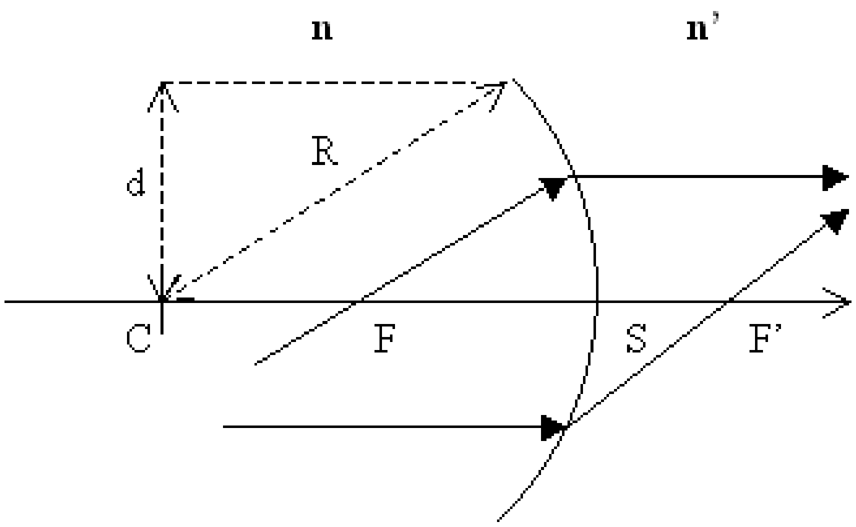
Avec origine au sommet S :
-n/SA + n'/SA' = (n'-n)/SC

Avec origine au centre de courbure C :
-n'/CA + n/CA' = (n-n')/CS

Attention : les longueurs sont **algébriques** !

Grandissement :
γ = A'B' / AB = (n/n') SA' / SA = CA' / CA

Foyers :
SF' = SC n'/(n'-n) et SF = -SC n/(n'-n)



R = SC rayon de courbure

AB objet ; A'B' image; S sommet; C centre de courbure; F foyer objet; F' foyer image

VII - Lentilles minces convergentes et divergentes

On travaille dans des conditions telles que **$d/R \ll 1$** (optique paraxiale, conditions de Gauss). Une lentille mince est constituée de 2 dioptres sphériques de centre de courbure C_1 et C_2 dont les sommets S_1 et S_2 sont considérés comme confondus.
La relation de conjugaison se déduit de celle du dioptre sphérique :

Dioptre 1 : air d'indice 1 / verre d'indice n
$-1/S_1A + n/S_1A' = (n-1)/S_1C_1$

Dioptre 2 : verre d'indice n / air d'indice 1
$-n/S_2A' + 1/S_2A'' = (1-n)/S_2C_2$

$1 \rightarrow n$, $A \rightarrow A'$ via (S_1, C_1)
Formule avec origine au sommet S :
$-n/SA + n'/SA' = (n'-n)/SC$
$n \rightarrow 1$, $A' \rightarrow A''$ via (S_2, C_2)

Par sommation avec **$S_1 = S_2 = O$**, on obtient :
$-1/OA + 1/OA'' = (n-1)\,(1/OC_1 - 1/OC_2)$

soit avec les notations classiques :

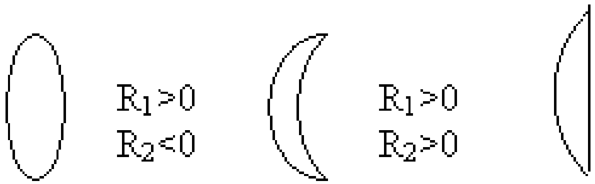
$$\boxed{-1/OA + 1/OA' = 1/OF' = -1/OF = (n-1)\,(1/R_1 - 1/R_2)}$$

Attention : les longueurs sont **algébriques, y compris** $\boxed{R_1 = OC_1 \text{ et } R_2 = OC_2\,!}$

$\boxed{\text{Grandissement : } \gamma = A'B'/AB = OA'/OA}$

Attention : le grandissement est **algébrique** ! $\boxed{\text{Image droite si } \gamma > 0 \text{ et retournée si } \gamma < 0}$

La vergence C d'une lentille est donnée par $\boxed{C = 1/f = (n-1)\,(1/R_1 - 1/R2)}$



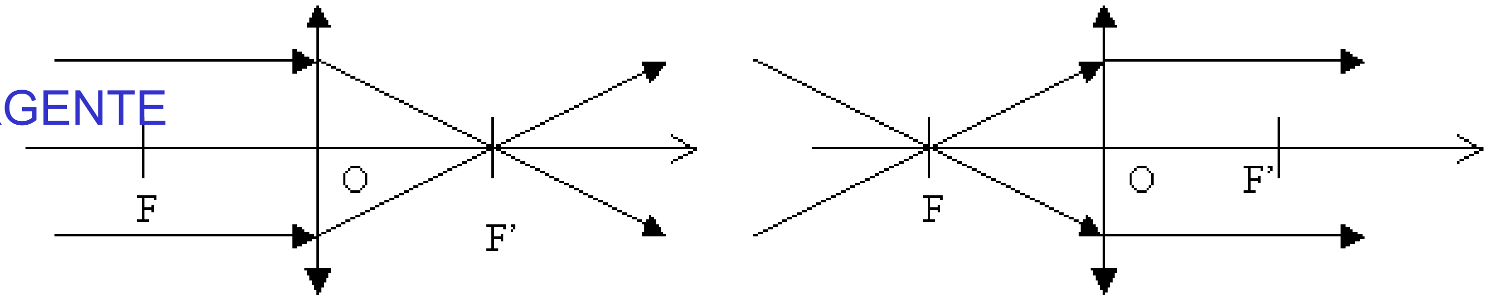
f = R / (n-1) pour une lentille plan convexe ou plan concave

$R = SC = OC$

$R_1>0$ $R_2<0$ $R_1>0$ $R_2>0$ $R_1>0$ $R_2 = \infty$

CONVERGENTE

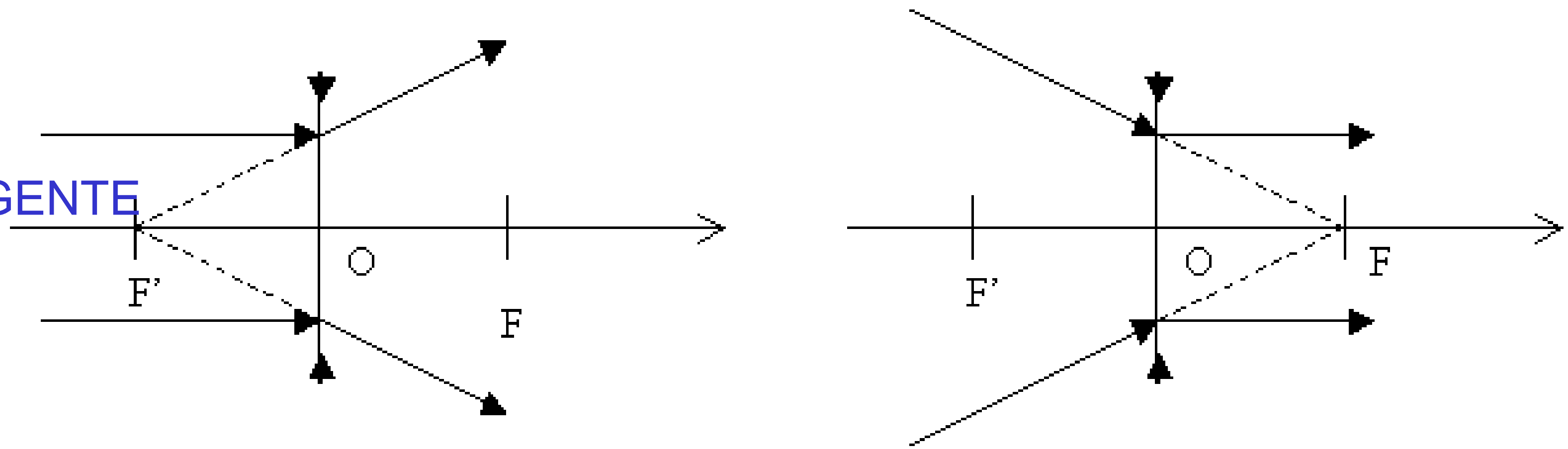
OF' >0



Distance focale OF' = f > 0, vergence C = 1 / f > 0

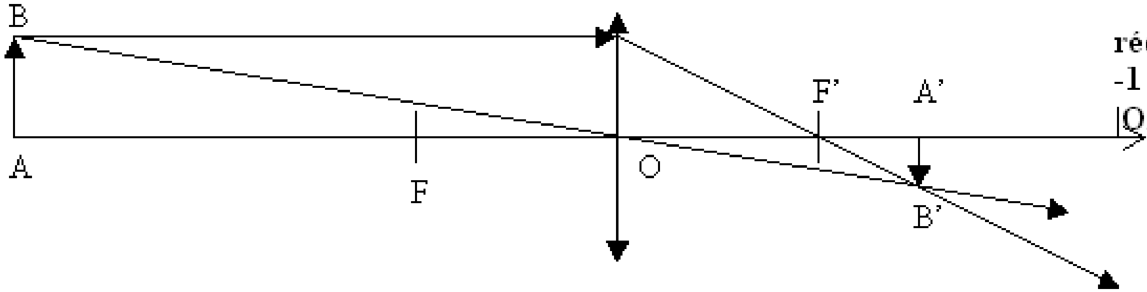
DIVERGENTE

OF' <0

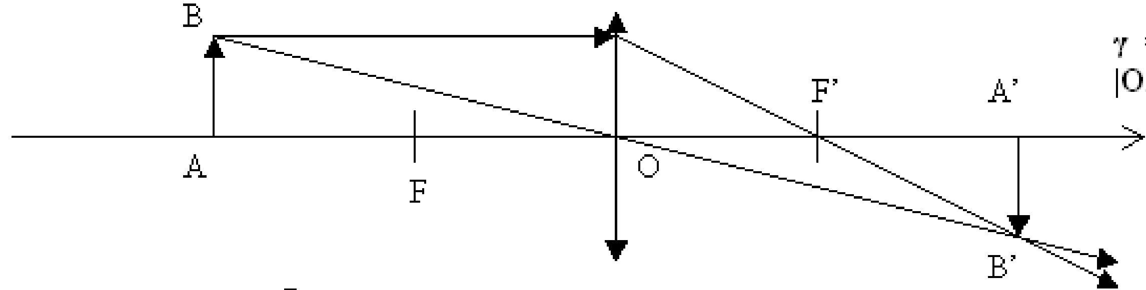


Distance focale OF' = f < 0, vergence C = 1 / f < 0

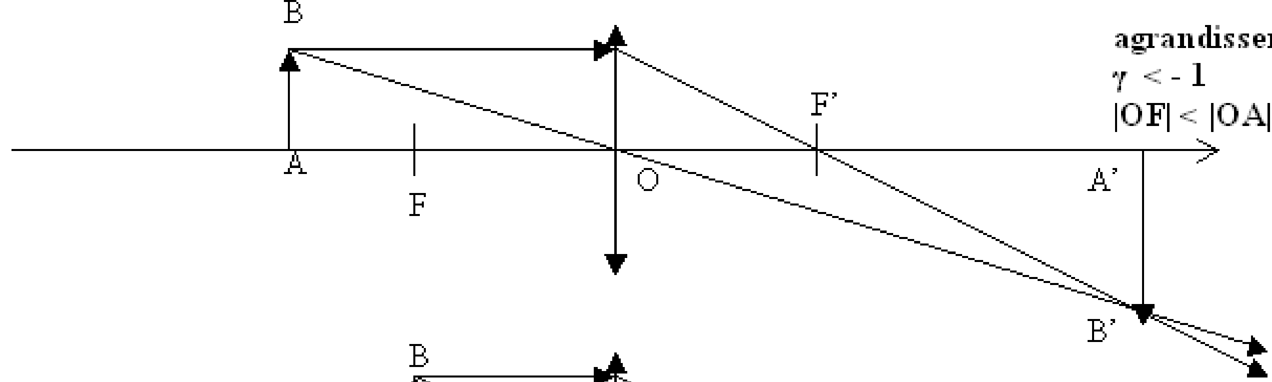
<u>Lentilles convergentes</u> : objet réel et image réelle



réduction
$-1 < \gamma < 0$
$|OA| > 2\ |OF|$



$\gamma = -1$
$|OA| = |OA'| = 2\ |OF|$



agrandissement
$\gamma < -1$
$|OF| < |OA| < 2\ |OF|$

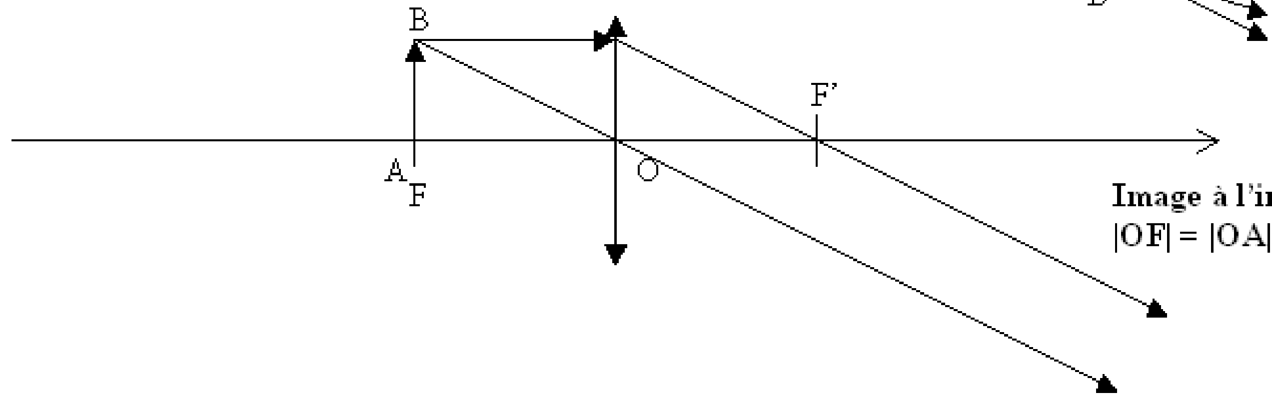
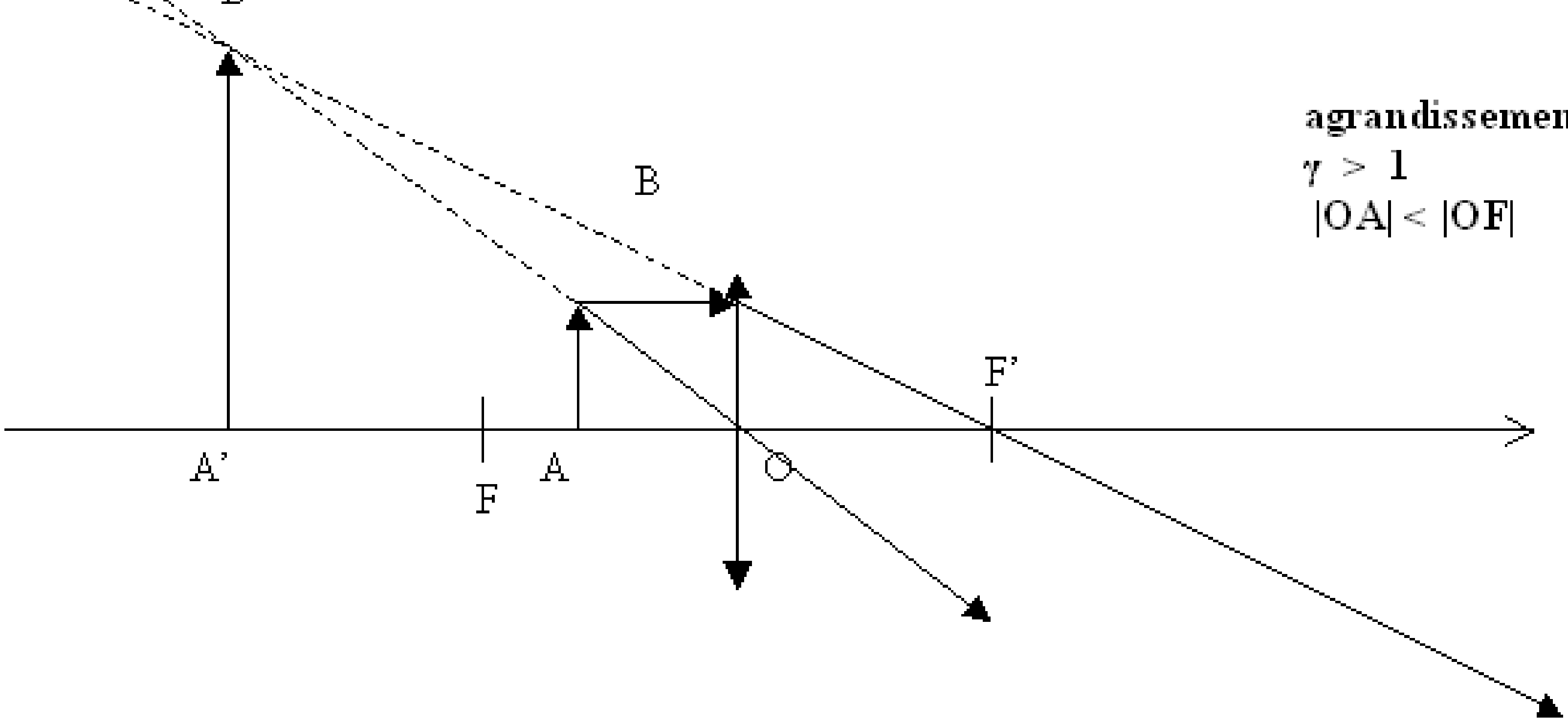
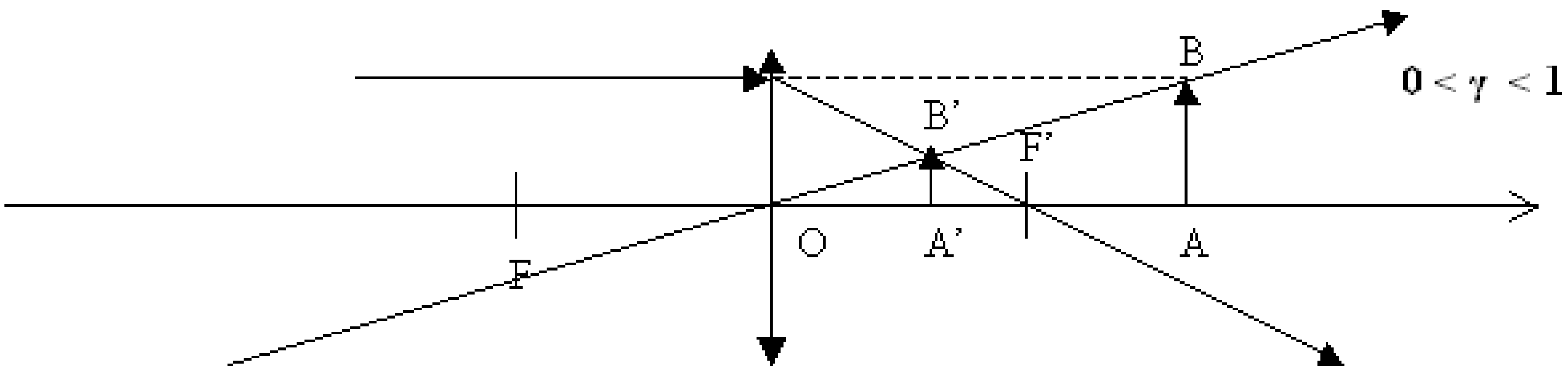


Image à l'infini
$|OF| = |OA|$

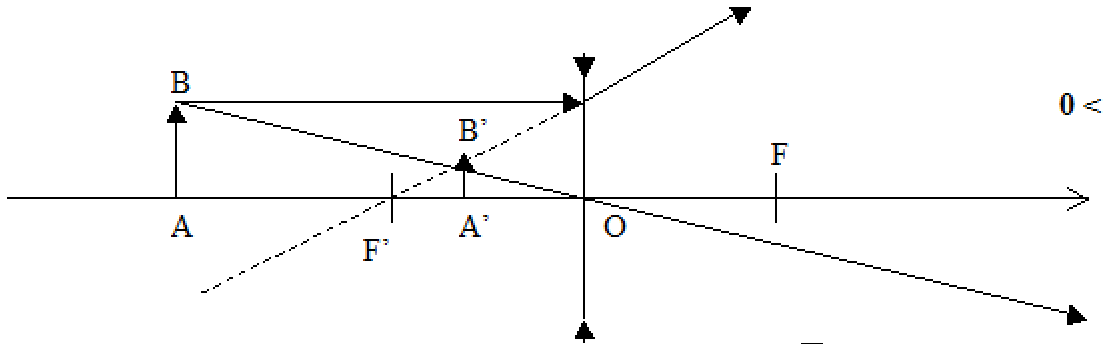
objet réel et image virtuelle ; la loupe ou l'oculaire



objet virtuel et image réelle

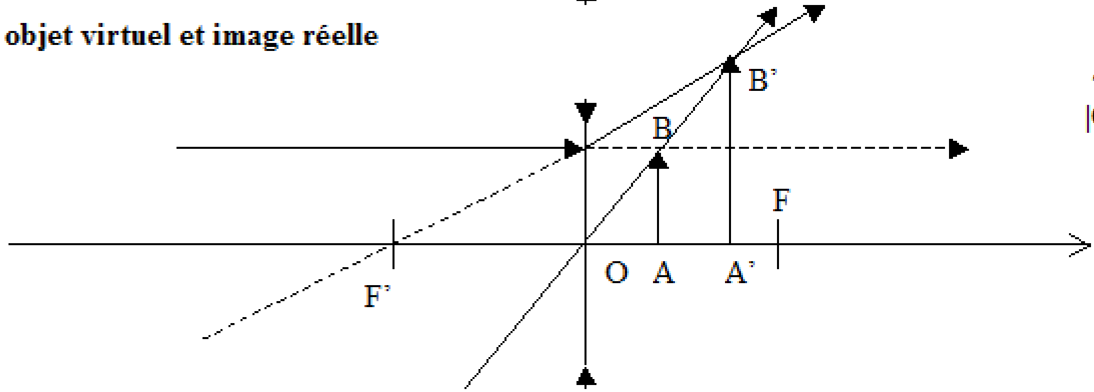


<u>Lentilles divergentes</u> : objet réel et image virtuelle



$0 < \gamma < 1$

objet virtuel et image réelle



$\gamma > 1$
$|OA| < |OF|$

objet virtuel et image réelle

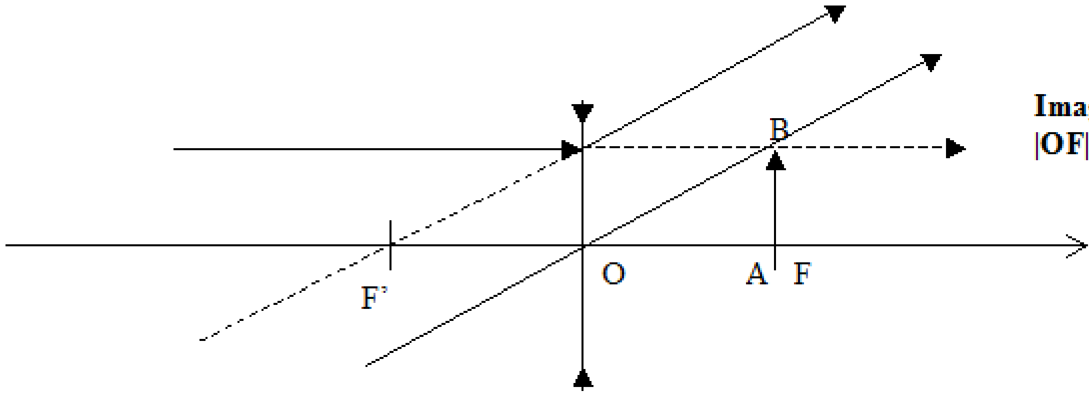


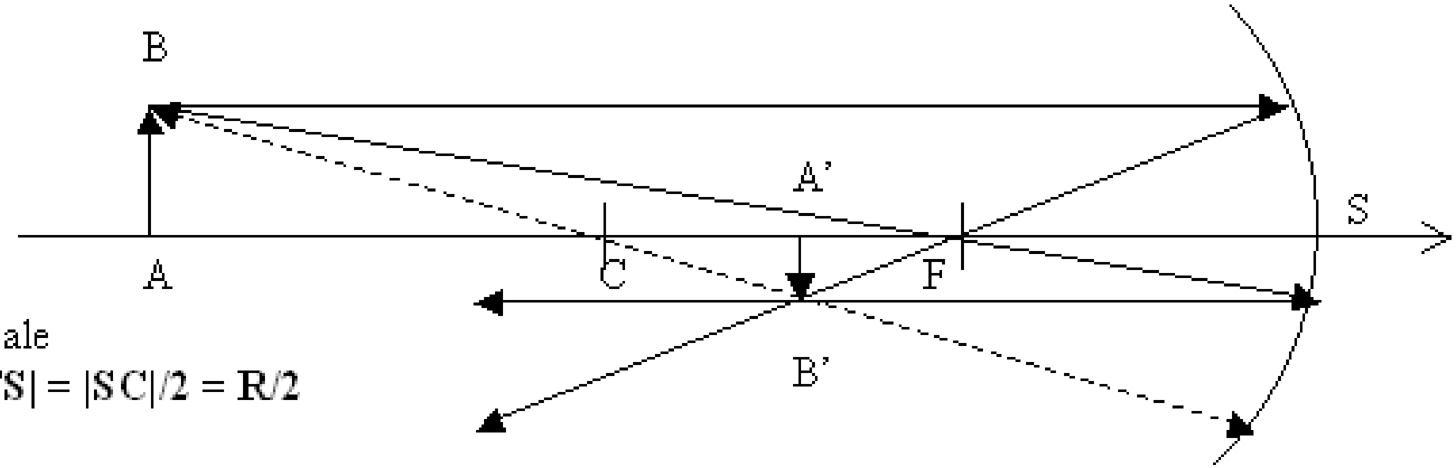
Image à l'infini
$|OF| = |OA|$

Avec origine au sommet S :
$- n/SA + n'/SA' = (n'-n)/SC$
$SF = - SC\, n/(n'-n)$
$\gamma = A'B' / AB = (n/n')\, SA' / SA$

VIII - Miroirs sphériques en optique paraxiale

C centre de courbure
$|CS| = R$

Foyer F
Distance focale
$f = |CF| = |FS| = |SC|/2 = R/2$



On obtient la relation de conjugaison à partir de celle du dioptre sphérique en posant $\boxed{n = -n' = 1}$.

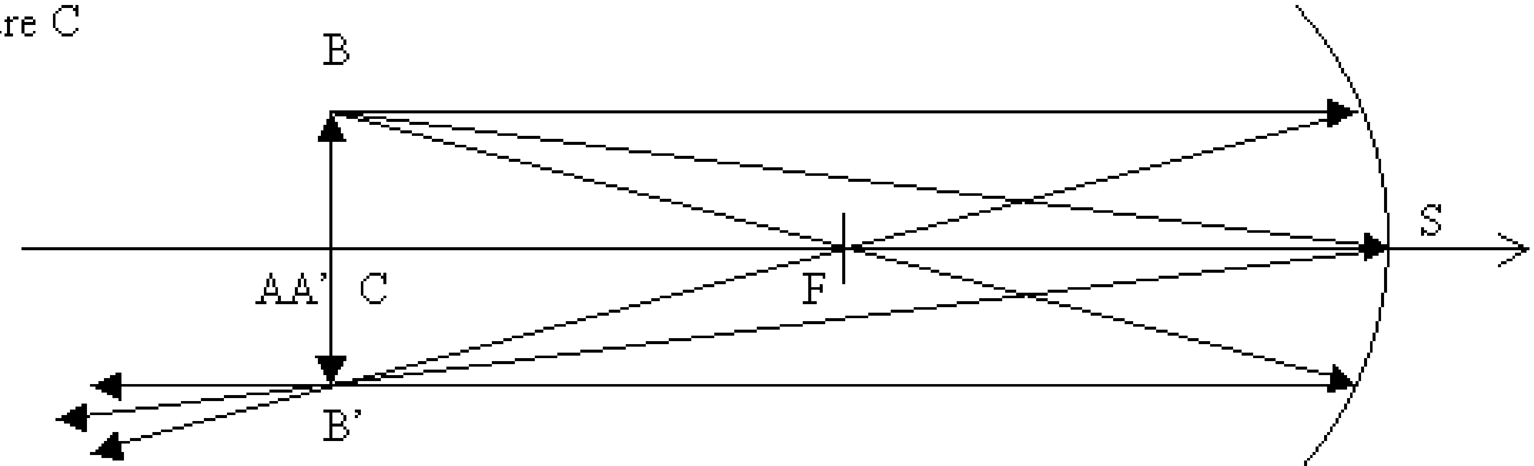
Relation de conjugaison : $1/SA + 1/SA' = 2/SC = 1/SF = - 1/f$

$SF = SC/2 = - f = - R/2$

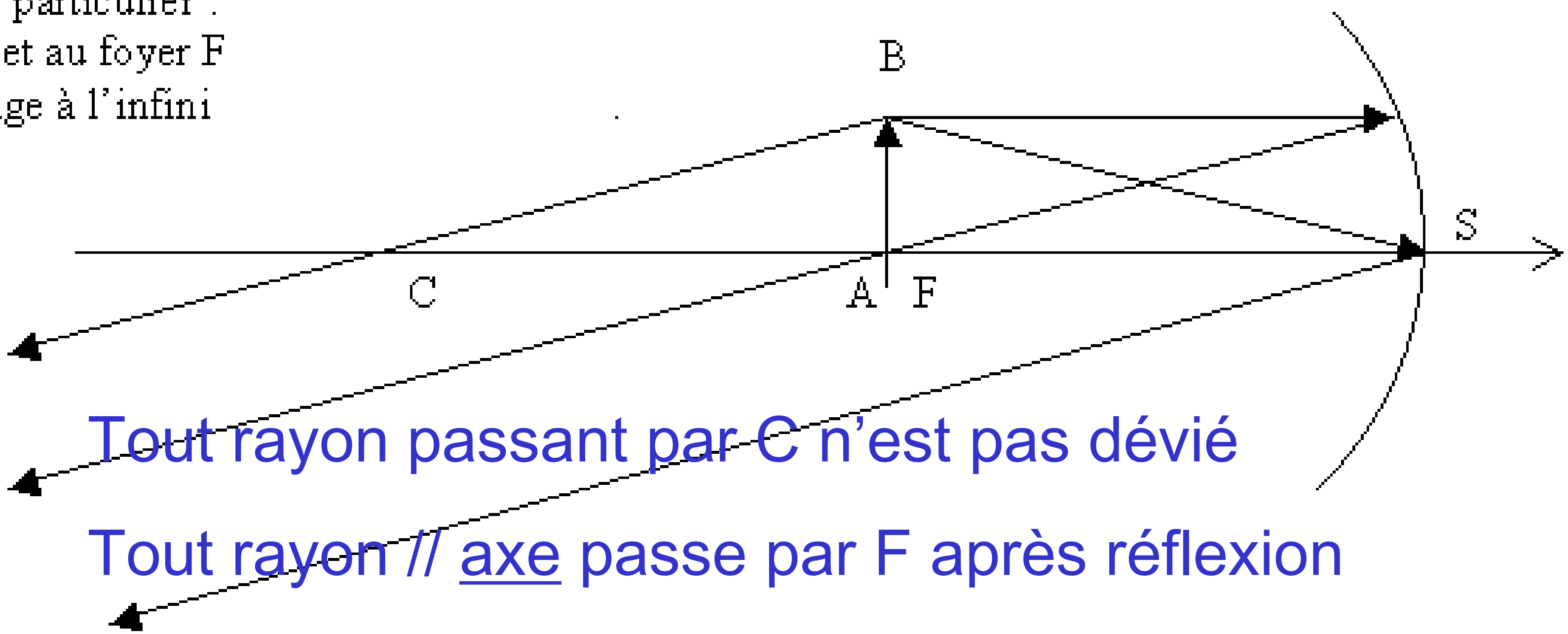
Tout rayon passant par le centre de courbure C n'est pas dévié. Attention : les longueurs sont **algébriques** ! Grandissement : $\gamma = A'B' / AB = - SA' / SA$

Miroirs concaves (primaires de télescopes)

Cas particulier :
Objet au centre de courbure C
$\gamma = -1$



Cas particulier :
Objet au foyer F
Image à l'infini

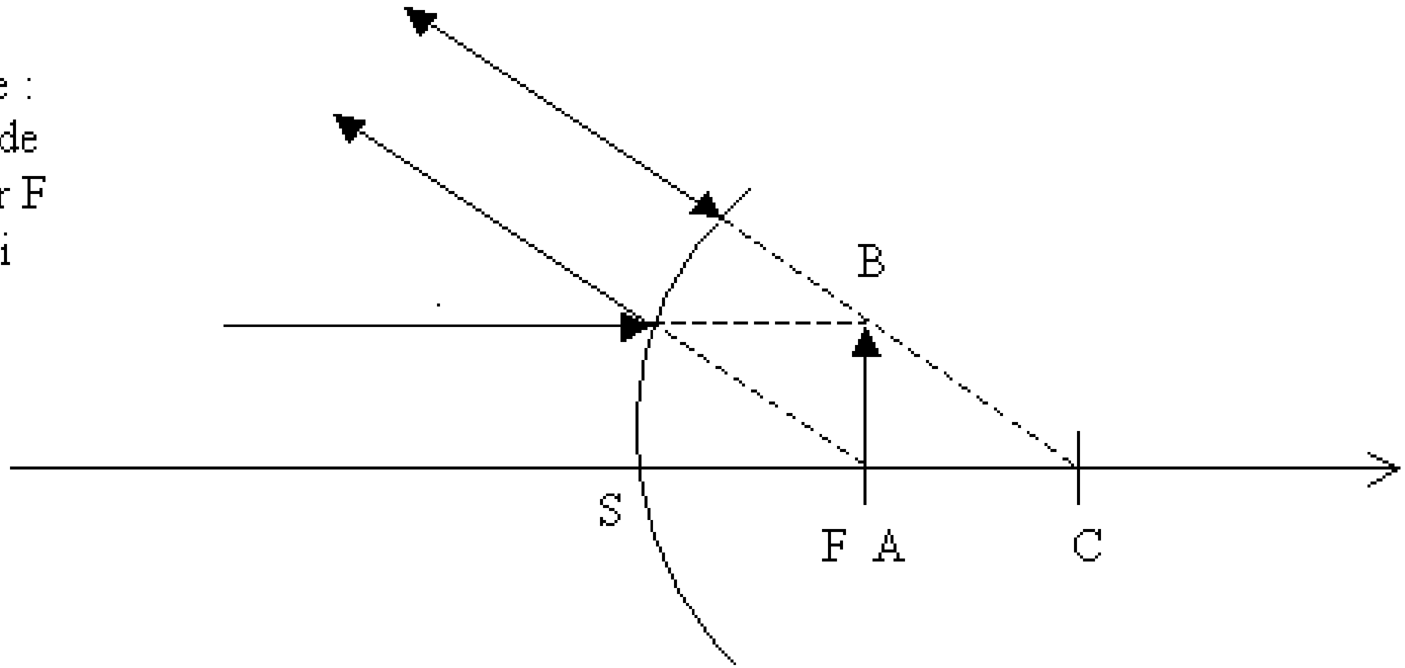


Tout rayon passant par C n'est pas dévié

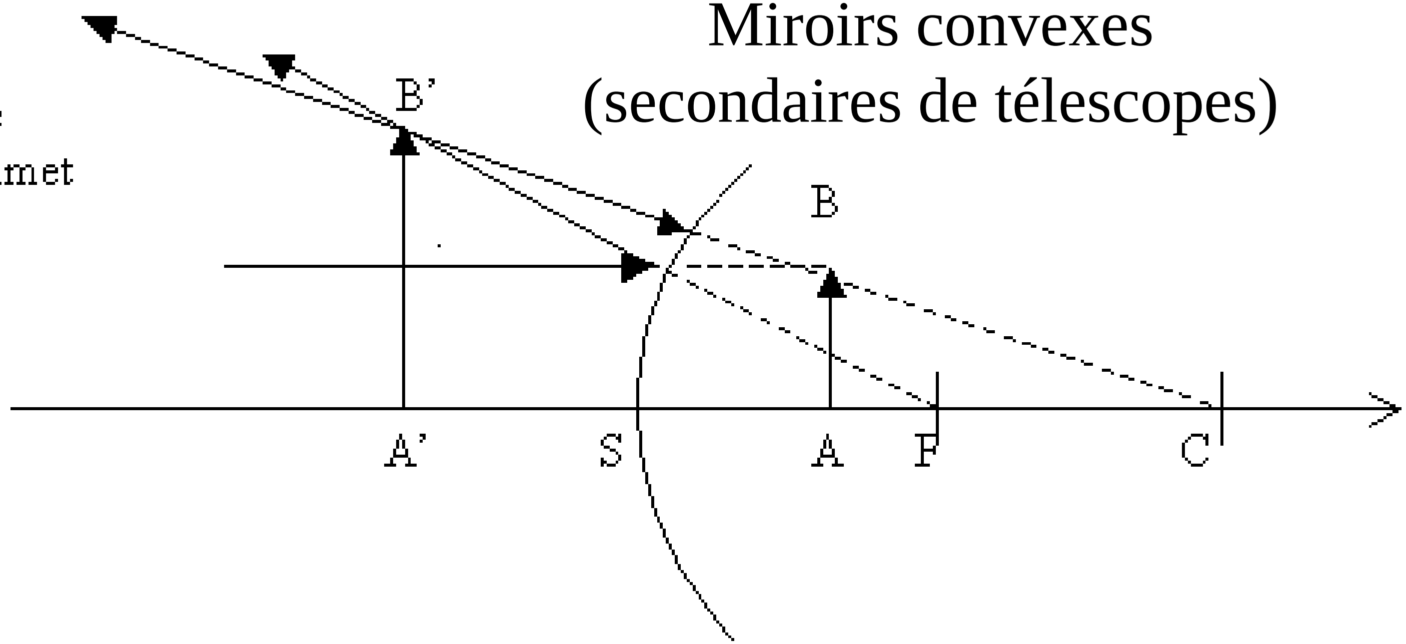
Tout rayon // <u>axe</u> passe par F après réflexion

Miroirs convexes (secondaires de télescopes)

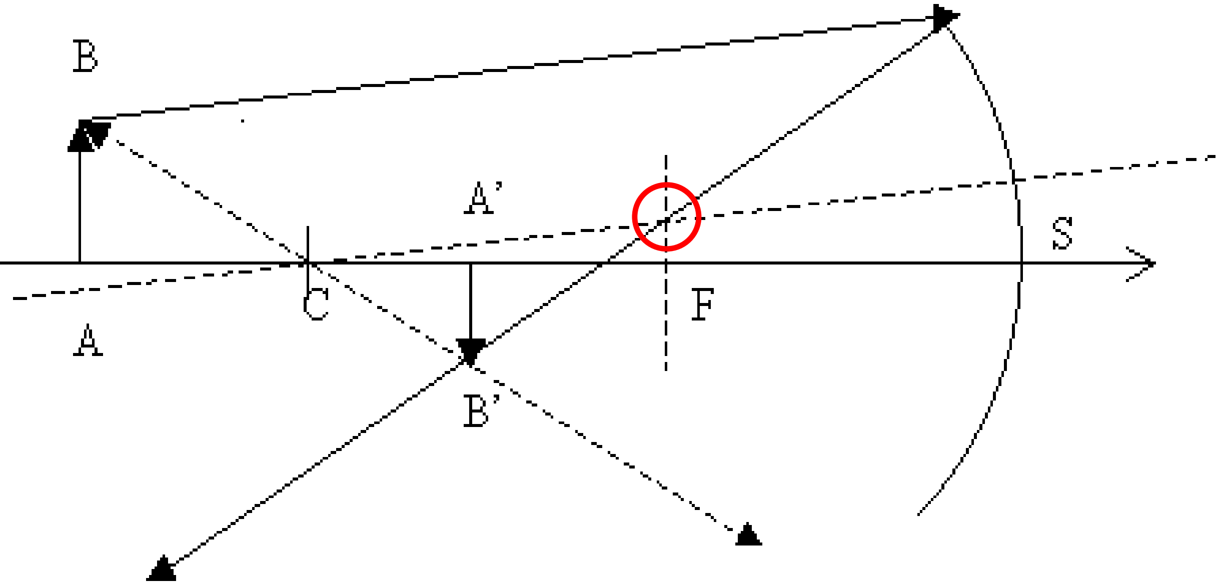
Miroir convexe :
cas particulier de
l'objet au foyer F
Image à l'infini



Miroir convexe :
cas particulier de
l'objet entre sommet
S et foyer F



construction d'un rayon quelconque :

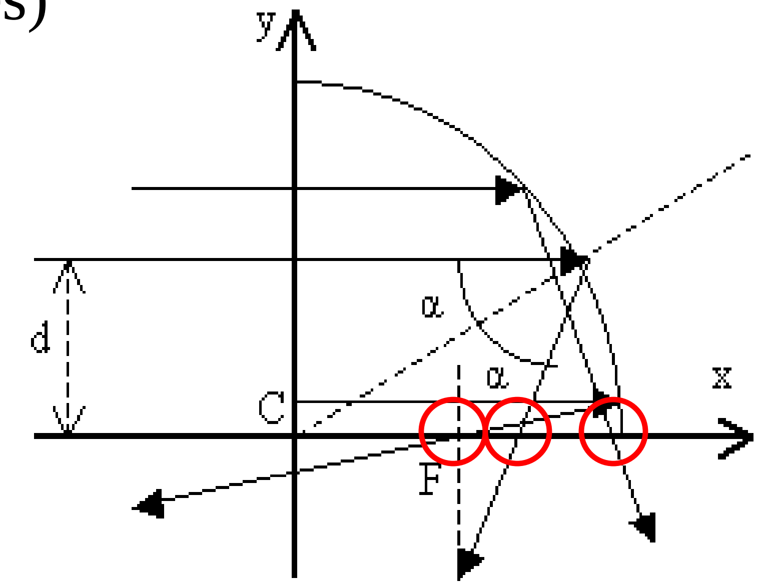


le rayon réfléchi est à l'intersection entre la parallèle au rayon incident passant par C et le plan focal passant par F

Miroirs concaves (primaires de télescopes)

Limites de l'optique paraxiale **:**

Le dioptre sphérique présente de l'astigmatisme : les rayons parallèles à l'axe Cx puis réfléchis **ne sont pas concourrants**, sauf en optique paraxiale où nous nous sommes placés jusqu'ici.



IX - Rappels sur la lunette astronomique

Une lunette astronomique est constituée d'un objectif convergent (généralement un doublet achromatique à deux lentilles de focale équivalente f_1) donnant une image au plan focal image (F'_1) de l'objet observé. La lumière traversant l'objectif, la lunette est aussi appelée réfracteur ; l'indice de réfraction étant fonction de la longueur d'onde de la lumière, le foyer bleu n'est pas superposé au foyer rouge (chromatisme). Cet effet est atténué par le choix d'un objectif achromatique.

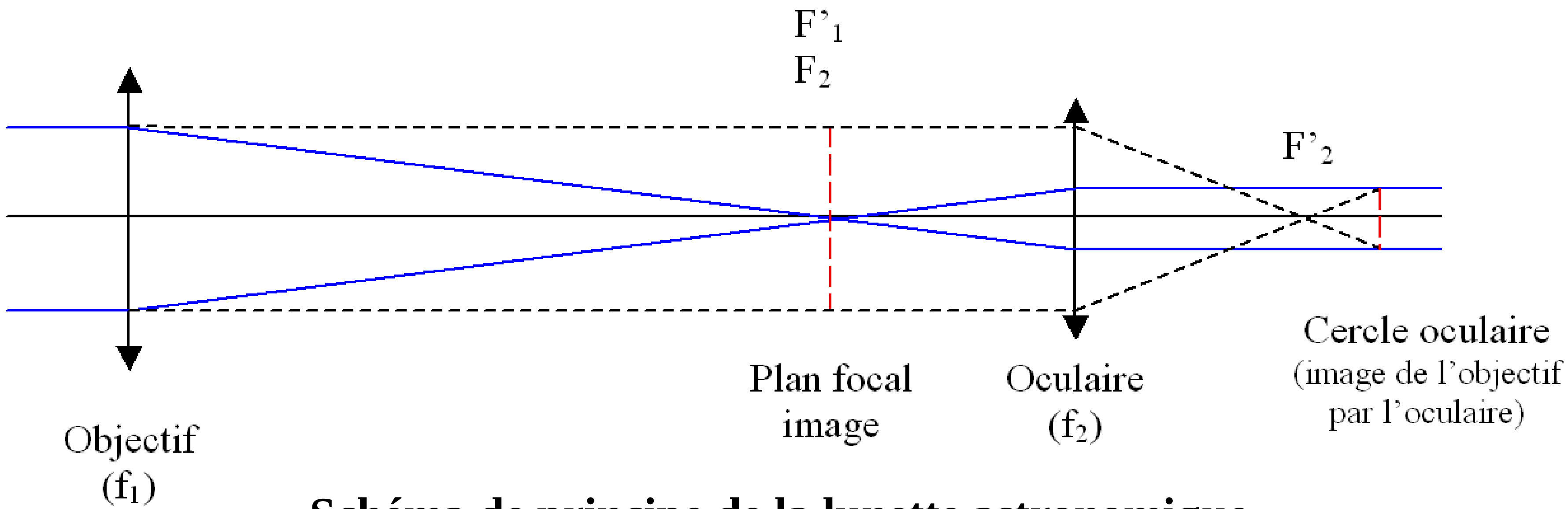


Schéma de principe de la lunette astronomique

(proportions non respectées ; les rayons virtuels qui servent à placer le cercle oculaire sont en pointillés)

Foyer primaire F'_1

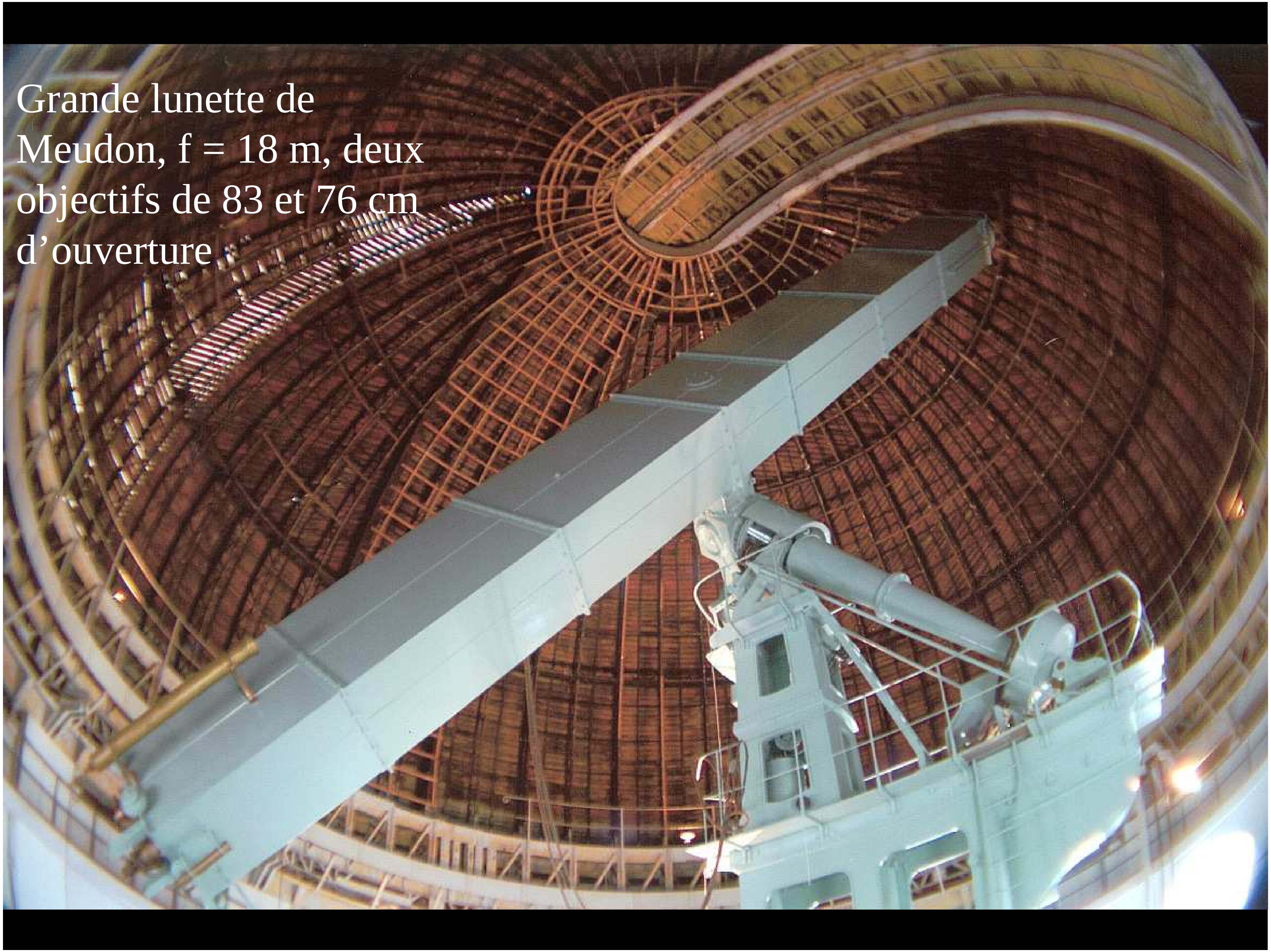
Au plan focal F'_1, le diamètre de l'image solaire vaut **α f_1**, α étant le diamètre apparent du soleil (32') mesuré en radians (9.3 milli radians); cette formule nous donne 9.3 mm x f_1, f_1 étant exprimée en mètres. **On aura donc une image solaire de 9.3 mm de diamètre par mètre de focale.**

Oculaire

Pour un œil normal observant à l'infini (sans accomodation), les foyers image F'_1 et objet F_2 de l'objectif et de l'oculaire sont confondus, on dit que le système est **afocal**. Dans ce cas, le **grossissement de l'ensemble est égal à f_1/f_2**. Le grossissement est aussi un **rapport angulaire égal à α'/α**, α' étant l'angle sous lequel est vu le soleil au travers de l'instrument, et α le diamètre apparent du soleil (9.3 milli radians).

Cercle oculaire

Le cercle oculaire constitue l'image de la pupille d'entrée de l'instrument (objectif de la lunette) par l'oculaire. L'œil devra toujours se placer au cercle oculaire pour recueillir le maximum de lumière. **Le diamètre du cercle oculaire est égal à D x (f_2/f_1)**, où D est le diamètre de l'instrument (numériquement quelques millimètres). Lorsque F'_1 et F_2 ne sont pas confondus, mais très voisins (F_2 devant F'_1), l'image n'est plus rejetée à l'infini par l'oculaire et devient virtuelle : l'oculaire fonctionne alors comme une **loupe**.


Grande lunette de
Meudon, f = 18 m, deux
objectifs de 83 et 76 cm
d'ouverture

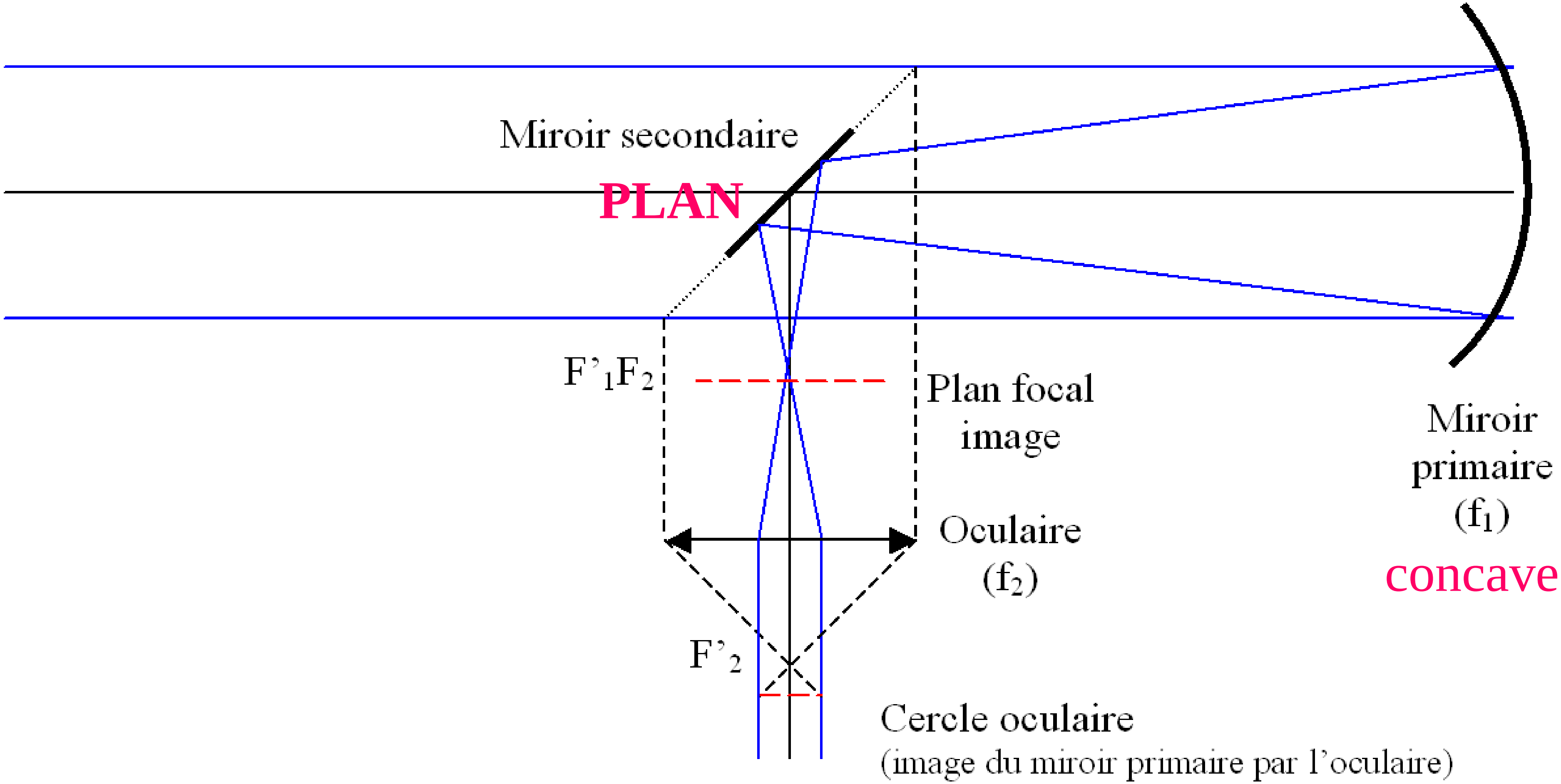


Schéma de principe d'un télescope Newton

(proportions non respectées ; les rayons virtuels qui servent à placer le cercle oculaire sont en pointillés)

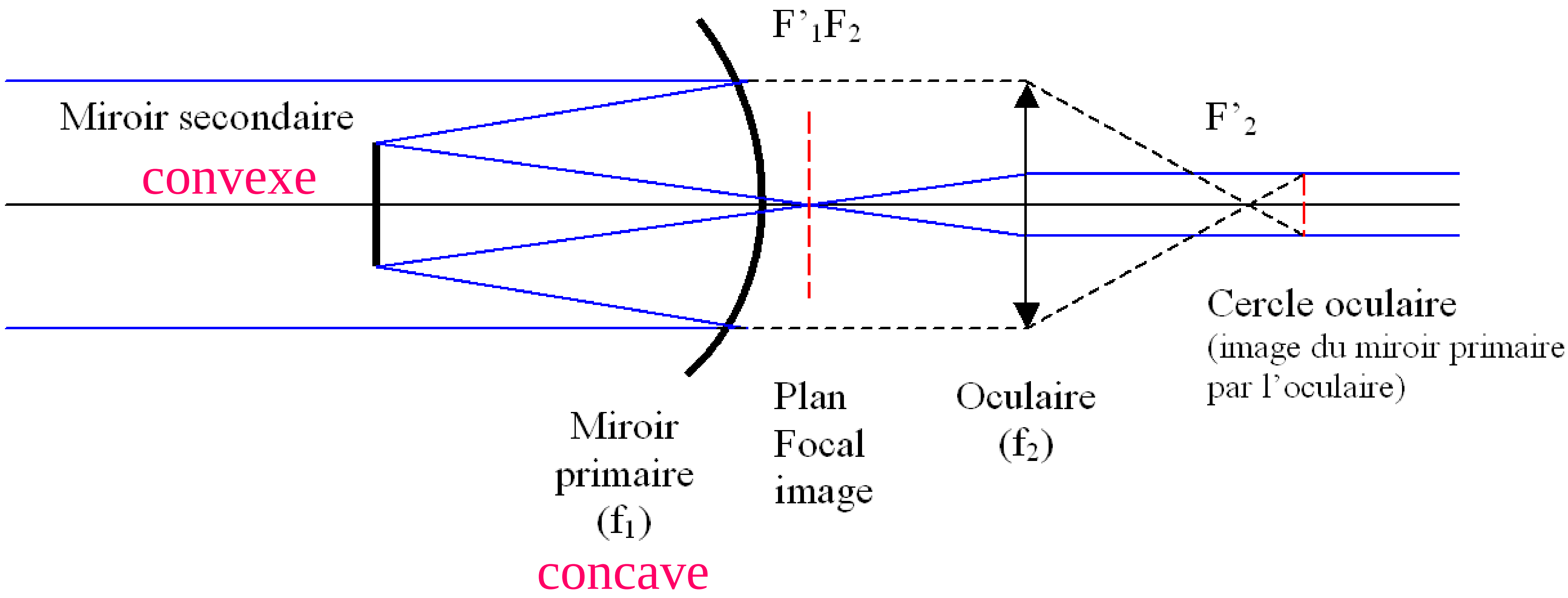
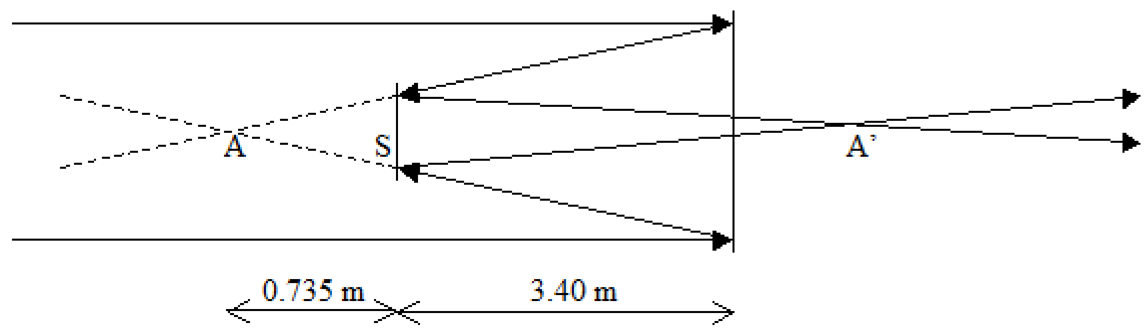


Schéma de principe d'un télescope Cassegrain

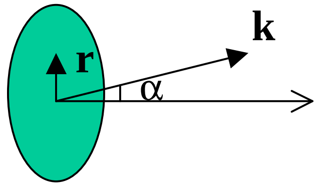
(proportions non respectées ; les rayons virtuels qui servent à placer le cercle oculaire sont en pointillés)

Télescope de 1 m de Meudon, f = 22 m, 2 miroirs, un convergent f_1=4.135 m et un divergent f_2=-0.905 m



XI – Pouvoir de résolution

Limité par la diffraction des ondes au travers de l'ouverture circulaire de l'objectif du télescope ou de la lunette. La figure de diffraction d'une ouverture circulaire est donnée par le carré du module de la transformée de Fourier de l'ouverture.



$$F(u) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(r)\, e^{-2i\pi\, u.r}\, d^2r \qquad \text{où} \quad 2\pi\, u = k \ \text{ vecteur d'onde}$$

En coordonnées polaires (r, θ) , $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et $d^2r = dr\, rd\theta$ $(0\leq \theta\leq 2\pi)$, avec $r^2 = x^2 + y^2$. On suppose que $f(r)$ ne dépend que de la seule variable r. Alors:

$$F(u) = 2\pi \int_0^{+\infty} f(r)\, r\, J_0(2\pi\, u\, r)\, dr$$

(transformation de Hankel ou Fourier cylindrique)

Pour une ouverture circulaire de rayon R, $f(r) = 1$ pour $0 < r < R$

$$F(u) = 2\pi \int_0^{R} r\, J_0(2\pi\, u\, r)\, dr = R\, J_1(2\pi\, u\, R)\ / u$$

La figure de diffraction du télescope est donnée par: $I(u) = I_0\, (2\, J_1(2\pi\, u\, R)\ / 2\pi\, u\, R)^2$

Le rayon de la tache de diffraction est donné par le premier zéro de J_1 qui vaut 3.832.

En posant $u = \sin(\alpha) / \lambda$, on en déduit $2\pi\, u\, R = 3.832$ d'où pour α petit $\boxed{\alpha = 0.61\ \lambda/R}$

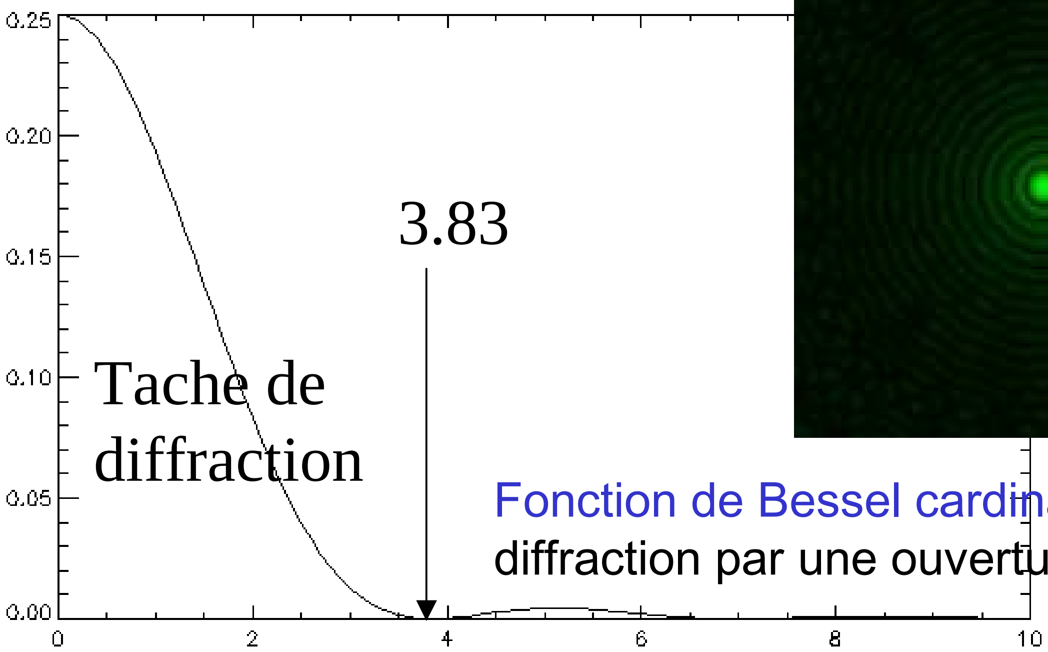
Le diamètre angulaire de la tache de diffraction d'un instrument de diamètre D est :
$\alpha = 1.22\ \lambda/D$ (λ,D en m et α en radians)

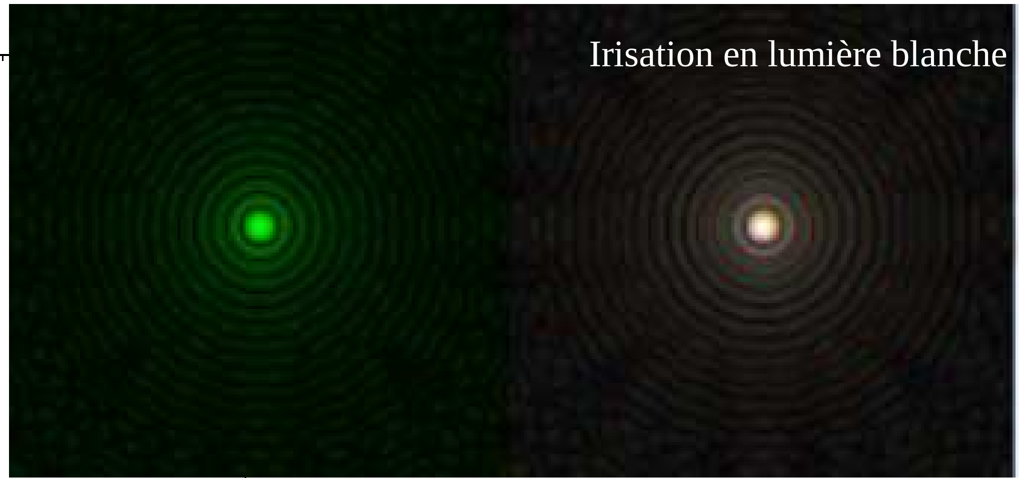
Par exemple, le diamètre angulaire de la tache de diffraction d'un télescope de 1 m dans le jaune à 590 nm vaut 0.15 arc sec (ce qui représente 100 km à la surface du Soleil).

Pour un télescope de rayon R_2 à occultation centrale de rayon R_1, on aurait eu :

$$F(u) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r\, J_0(2\pi\, u\, r)\, dr = [R_2\, J_1(2\pi\, u\, R_2) - R_1\, J_1(2\pi\, u\, R_1)]\ /\ u$$

Et $I(u) = I_0\ [\, R_2 J_1(2\pi\, u\, R_2) - R_1 J_1(2\pi\, u\, R_1)\,]^2\ /\ [\pi\, u\, (R_2^2 - R_1^2)\,]^2$





Fonction de Bessel cardinal $J_1(x)/x$ apparaissant dans la diffraction par une ouverture circulaire (proche de sin(x)/x)

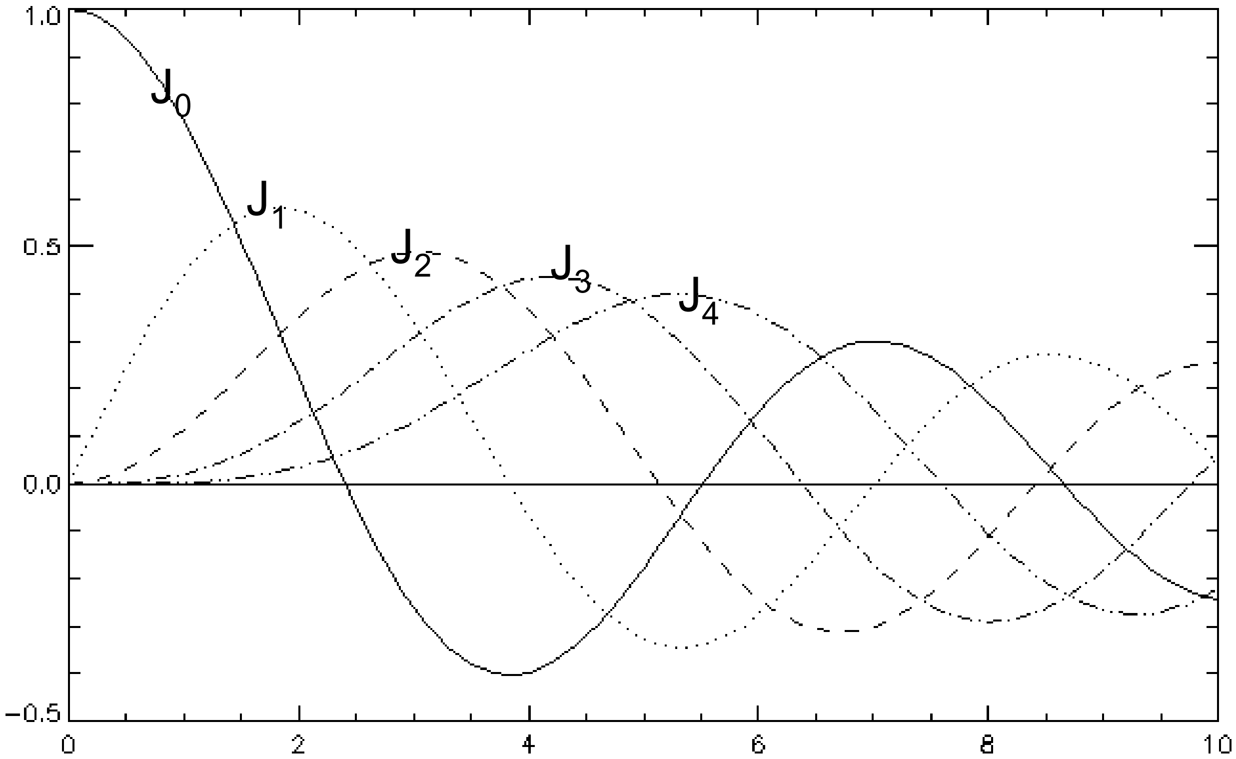
Note sur les fonctions de Bessel d'indice entier n:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, (x/2)^{n+2k} \, / \, (k!(n+k)!)$$

Comportement asymptotique:

$x \to 0 \quad J_n(x) \to (x/2)^n \, / \, n!$

$x \to \infty \quad J_n(x) \to [2 \, / \, (\pi \, x) \,]^{1/2} \cos(\, x - (\pi \, /2)(n+1/2) \,)$



Fonctions de Bessel $J_n(x)$ pour n variant de 0 à 4

n=0 ————

n=1 ....

n=2 - - - - - -

n=3 _ · _ · _ · _

n=4 _ ··· _ ··· _

EXEMPLE: Le télescope de 1 m de Meudon

Le télescope de 1 m est constitué d’un miroir primaire concave de focale $f_1 = 4.135$ m et d’un

miroir secondaire convexe de focale $f_2 = – 0.905$ m. La distance primaire/secondaire vaut 3.40 m.

1) *A quelle distance du secondaire l’image se forme t-elle ?*

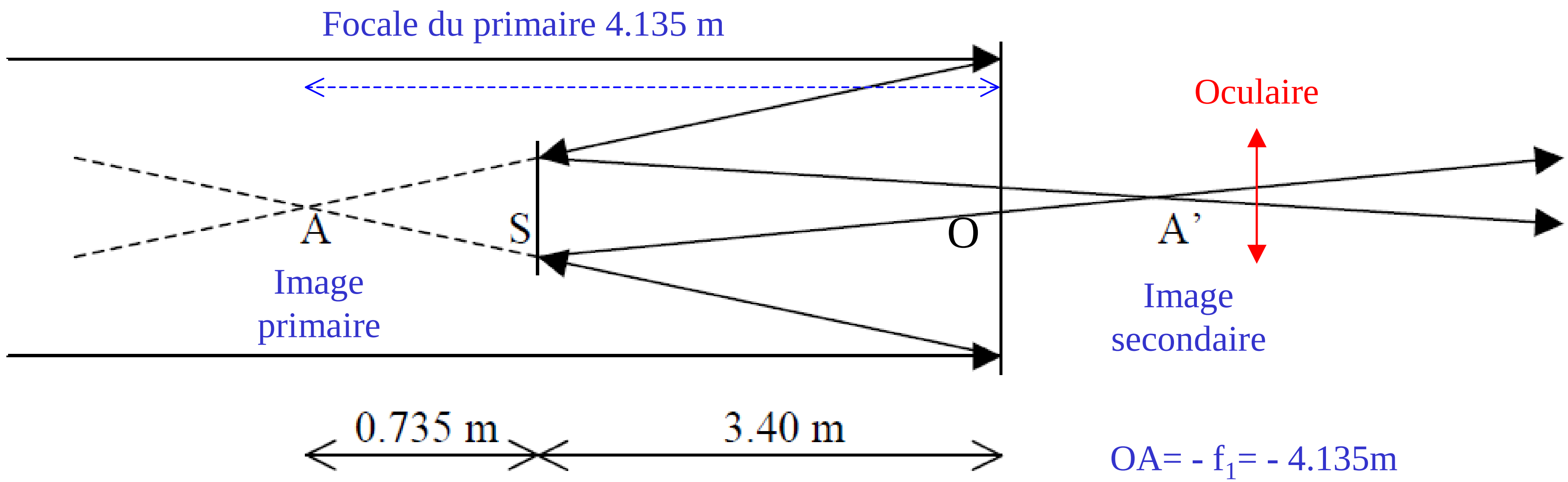
2) *Quel est le grandissement du secondaire ?*

3) *Quelle est la focale équivalente du télescope ?*

4) *On utilise un oculaire de 50 mm de focale; où faut-il le placer ? quelle sera la dimension de l’image de la pupille de sortie ?*

5) *On observe à 600 nm de longueur d’onde; quel est le pouvoir séparateur théorique ?*

6) *Quels seront les plus fins détails discernables sur la Lune ?*



1) relation de conjugaison $1/SA + 1/SA' = 1/SF_2$
avec SA = - 0.735 m et SF2 = -0.905 m donne SA' = 3.90 m
2) grandissement $\gamma = SA'/SA = 3.90/-0.735 = -5.306$
3) focale équivalente = $|\gamma\ SF_1| = 5.306 \times 4.135 = 22$ m

4) l'oculaire de focale 50 mm se place à OA'+0.05 = (3.90-3.40) + 0.05 à droite du miroir primaire, soit 0.55 m, ou à 5 cm à droite de A' (image); l'oculaire renvoie l'image céleste à l'infini. La pupille de sortie aura un diamètre égal à :

$D \times F_{oculaire} / F_{telescope} = 1 \times 0.05/22 = 2.2$ mm

5) $\alpha = 1.22\ \lambda/D = 7.3\ 10^{-7}$ rd = 0.15 '' environ

6) Détails = α x distance Terre-Lune = 300 m environ