

# Electromagnétisme B

- équations de Maxwell dans un conducteur, locales et globales, potentiel scalaire et vecteur, équation de conservation de la charge; densité de charge et de courant électrique
- équations de Maxwell dans le vide et ondes électromagnétiques
- équations de Maxwell dans un diélectrique et ondes électromagnétiques; onde de plasma
- équations de Maxwell en régime permanent: électrostatique et magnétostatique; dipôle
- loi d'Ohm et conductivité; loi d'Ohm pour un conducteur mobile
- ARQS dans un milieu conducteur; induction magnétique dans un circuit: loi de Faraday, loi de Lenz; courant induit; loi d'Ohm généralisée dans un circuit
- équation de conservation de l'énergie, densité d'énergie, pression électrostatique et magnétique
- force de Laplace subie par un courant volumique ou linéique
- analogie champ de gravitation/champ électrostatique.

## I - Equations de Maxwell locales et globales dans un milieu conducteur

Maxwell (1831-1879) est un physicien écossais qui a développé la formulation mathématique des travaux antérieurs sur l'électricité et le magnétisme, réalisés notamment par Gauss (1777-1855), Faraday (1791-1867) et Ampère (1775-1836). Il proposa un ensemble de 20 équations présentées la première fois à la Royal Society en 1864 qui décrivent le champ électrique et le champ magnétique ainsi que leur interaction avec la matière (charges et courants). Mais il faudra attendre l'avènement du calcul opérationnel et de l'analyse vectorielle vers 1900 pour aboutir aux 4 équations ci dessous.

### *Equations de Maxwell locales dans un milieu conducteur*

Nous postulons les 4 équations locales suivantes:

|                                                                                               |                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$                                                    | <i>Equation de Maxwell Gauss</i>           |
| $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$                                    | <i>Equation de Maxwell Faraday</i>         |
| $\text{div } \mathbf{B} = 0$                                                                  | <i>Equation de Maxwell Thomson ou flux</i> |
| $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ | <i>Equation de Maxwell Ampère</i>          |

avec les quantités suivantes dépendant du temps  $t$  et des coordonnées spatiales  $(x, y, z)$ :

$\mathbf{E}$  champ électrique (unité: Volt/mètre ou  $\text{V m}^{-1}$ ) - *champ vectoriel*

$\mathbf{B}$  champ magnétique (unité: Tesla ou T) - *champ vectoriel*

$\mathbf{j}$  densité volumique de courant électrique (unité: Ampère  $\text{m}^{-2}$ ) - *champ vectoriel*

$\rho$  densité volumique de charge électrique (unité: Coulomb  $\text{m}^{-3}$ ) - *champ scalaire*

$\epsilon_0$  est la permittivité du vide ( $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$  unités SI)

$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide ( $4\pi \cdot 10^{-7}$  unités SI)

avec entre eux la relation  $\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$  où  $C = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Les équations sont couplées. Les charges  $\rho$  ou un champ magnétique variable sont source de  $\mathbf{E}$  (équations de Maxwell Gauss et Faraday), tandis que la densité de courant électrique  $\mathbf{j}$  ou un champ électrique variable sont source de  $\mathbf{B}$  (Maxwell Ampère). En régime stationnaire (électrostatique, magnétostatique), les équations sont découplées. Les charges sont source de  $\mathbf{E}$  et les courants source de  $\mathbf{B}$ .

$\text{div}$ ,  $\text{rot}$  sont les opérateurs "divergence" et "rotationnel" agissant sur les variables d'espace (voir le formulaire, en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques).

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, si  $\mathbf{E}$  a pour composantes ( $E_x, E_y, E_z$ ) dans un repère orthonormé de vecteurs unitaires ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ), et si  $\nabla$  est l'opérateur "nabla" des dérivées partielles par rapport aux variables d'espace  $x, y, z$ , soit  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ :

$$\text{div } \mathbf{E} = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z = \nabla \cdot \mathbf{E}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = (\partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z, \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x, \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y) = \nabla \wedge \mathbf{E}$$

$\partial/\partial t$  désigne la dérivée partielle par rapport au temps  $t$ .

A ces quatre équations couplées en termes de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , nous ajoutons:

|                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{E} = - \text{grad } V - \partial \mathbf{A} / \partial t$<br>$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$<br>et la condition de jauge de Coulomb, $\text{div } \mathbf{A} = 0$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$V$  est le potentiel scalaire (unité: Volt) - *champ scalaire*

$\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur (unité: Tesla m) - *champ vectoriel*

**grad** est l'opérateur "gradient" agissant sur les variables d'espace; en coordonnées cartésiennes:

$$\text{grad } V = (\partial V / \partial x, \partial V / \partial y, \partial V / \partial z) = \nabla V \quad (\text{les opérateurs grad et } \nabla \text{ sont identiques})$$

On remarque que:

- l'équation de Maxwell Faraday  $\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$  découle de  $\mathbf{E} = - \text{grad } V - \partial \mathbf{A} / \partial t$  en prenant son rotationnel, sachant que le rotationnel d'un gradient est nul.
- l'équation de Maxwell flux  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  découle de  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  en prenant sa divergence, sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle.
- si l'on prend la divergence de l'équation de Maxwell Ampère  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ , sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle, on obtient  $\text{div } \mathbf{j} + \epsilon_0 \partial \text{div } \mathbf{E} / \partial t = 0$ , qui combinée avec l'équation de Maxwell Gauss  $\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$  donne l'équation de conservation de la charge:

|                                                           |
|-----------------------------------------------------------|
| $\partial \rho / \partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0$ |
|-----------------------------------------------------------|

Lorsqu'il n'y a qu'une population de charges mobiles se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$ , on a la relation:

|                                |                     |
|--------------------------------|---------------------|
| $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ | $(\text{A m}^{-2})$ |
|--------------------------------|---------------------|

Dans un conducteur, comportant autant de charges positives fixes (ions dans un réseau cristallin de charge volumique  $\rho_+$ ) et de charges négatives mobiles (électrons de conduction, un par atome en moyenne, de charge volumique  $\rho_-$ ), on a:

|                              |                                                                                                                                          |                                                        |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$ | $\mathbf{j} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-, \quad \mathbf{v}_+ = \mathbf{0} \text{ d'où } \mathbf{j} = \rho_- \mathbf{v}_-$ | le courant $\mathbf{j}$ est produit par les électrons, |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|

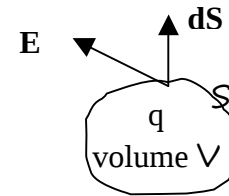
et son sens est opposé au mouvement des électrons puisque  $\rho_- = -n e$  où  $n$  est la densité volumique d'électrons (en  $\text{m}^{-3}$ ) et  $-e$  la charge de l'électron ( $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ).

Les équations de Maxwell sont locales; elles existent également sous forme globale intégrées sur une portion d'espace à l'aide des théorèmes de Stokes (dit du "rotationnel") ou d'Ostrogradski (dit "flux divergence"); la forme globale est celle préférée lorsqu'il y a des symétries pour déterminer le champ électrique et le champ magnétique à partir d'une distribution de charges ou de courants donnée.

## Equations de Maxwell globales dans un milieu conducteur

### Usage du théorème d'Ostrogradski:

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \rightarrow \iiint \text{div } \mathbf{E} \, dv = \iiint \rho/\epsilon_0 \, dv \rightarrow \boxed{\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0}$$



Le flux de  $\mathbf{E}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à  $q/\epsilon_0$  (théorème de Gauss,  $q$  charge intérieure)

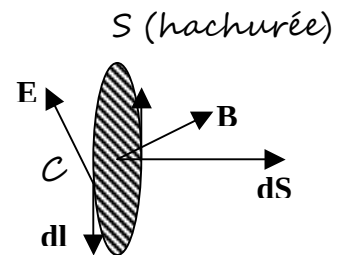
$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \rightarrow \iiint \text{div } \mathbf{B} \, dv = \boxed{\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0}$$

le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est à flux conservatif: son flux sur une surface fermée  $S$  entourant un volume  $V$  est globalement nul; le flux magnétique entrant dans le volume  $V$  est donc égal au flux qui en sort; en conséquence, on ne peut trouver de monopôles magnétiques.

### Usage du théorème de Stokes:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t \rightarrow \iint \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\partial/\partial t \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\partial \Phi(\mathbf{B})/\partial t}$$

La circulation de  $\mathbf{E}$  sur un contour fermé  $C$  et orienté est l'opposé de la variation du flux magnétique à travers n'importe quelle surface  $S$  enlacée par ce contour. La surface est orientée par la règle des doigts de la main droite: pouce dans le sens de  $C$ , index vers le centre de la surface enlacée par le contour, le majeur indique le vecteur surface  $\mathbf{S}$ . C'est la loi de Faraday.



$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t \rightarrow \iint \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \epsilon_0 \partial/\partial t \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\rightarrow \boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 [I + \epsilon_0 \partial \Phi(\mathbf{E})/\partial t]} \quad (\text{théorème d'Ampère généralisé})$$

La circulation de  $\mathbf{B}$  sur un contour fermé  $C$  et orienté est proportionnelle au courant électrique et de déplacement traversant toute surface enlacée (et orientée) par ce contour.

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \rightarrow \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \boxed{\Phi(\mathbf{B}) = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}} \quad (\text{théorème d'Ampère du potentiel vecteur})$$

La circulation de  $\mathbf{A}$  sur un contour fermé  $C$  et orienté est égale au flux de  $\mathbf{B}$  à travers toute surface enlacée (et orientée) par ce contour.

## II - Equations de Maxwell dans le vide et ondes électromagnétiques

Dans le vide, il n'y a ni charge ( $\rho = 0$ ), ni courant ( $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ):

|                                                                            |                                    |
|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| $\text{div } \mathbf{E} = 0$                                               | <i>Equation de Maxwell Gauss</i>   |
| $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$                 | <i>Equation de Maxwell Faraday</i> |
| $\text{div } \mathbf{B} = 0$                                               | <i>Equation de Maxwell flux</i>    |
| $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ | <i>Equation de Maxwell Ampère</i>  |

La combinaison de ces équations aboutit à l'équation de d'Alembert, dont les solutions sont les ondes électromagnétiques:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$$

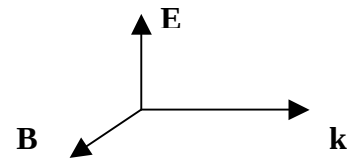
où  $\Delta \mathbf{E} = (\partial^2 \mathbf{E} / \partial x^2, \partial^2 \mathbf{E} / \partial y^2, \partial^2 \mathbf{E} / \partial z^2)$  est l'opérateur Laplacien, et  $\partial^2 / \partial t^2$  la dérivée seconde par rapport au temps.

Par exemple, une Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) de la forme:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$

est solution de l'équation de d'Alembert;  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  (x, y, z) désigne un point M de l'espace; le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  indique la direction de propagation. Sa norme k (unité:  $\text{m}^{-1}$ ) est liée à la pulsation  $\omega$  (unité:  $\text{rd s}^{-1}$ ) par la relation de dispersion  $\omega = C k$ , où C est la vitesse de la lumière ( $\mu_0 \varepsilon_0 C^2 = 1$ ).

Dans le cas des OPPH, on montre que les opérateurs prennent la forme simplifiée suivante:

|                                         |                     |
|-----------------------------------------|---------------------|
| $\text{grad} = i \mathbf{k}$            | (multiplication)    |
| $\text{div} = -i \mathbf{k} \cdot$      | (produit scalaire)  |
| $\text{rot} = -i \mathbf{k} \wedge$     | (produit vectoriel) |
| $\Delta = -k^2$                         | (multiplication)    |
| $\partial / \partial t = i \omega$      | (multiplication)    |
| $\partial^2 / \partial t^2 = -\omega^2$ | (multiplication)    |



L'équation de Maxwell Faraday donne alors  $-i \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = -i \omega \mathbf{B}$  d'où

$$\mathbf{B} = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) / \omega$$

est le champ magnétique associé à l'onde plane. Les vecteurs ( $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) forment donc un trièdre direct,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation  $\mathbf{k}$ . Ils vibrent en phase et on a la relation  $\underline{E} = C \underline{B}$  entre les normes de  $\mathbf{E}$  et de  $\mathbf{B}$ .

La densité volumique d'énergie électromagnétique locale est  $\rho_E = \varepsilon_0 E^2$  ( $\text{J m}^{-3}$ ).

La puissance moyenne propagée par l'onde plane est  $\langle \Pi \rangle = \langle \rho_E \rangle C = 1/2 \varepsilon_0 |E|^2 C$  (en  $\text{W m}^{-2}$ ) où  $|E|$  est l'amplitude du champ électrique.

### III - Equations de Maxwell et ondes dans un diélectrique LHI

Dans un milieu diélectrique sans charge ( $\rho = 0$ ), ni courant ( $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ):

|                                                                   |                                    |
|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| $\text{div } \mathbf{D} = 0$                                      | <i>Equation de Maxwell Gauss</i>   |
| $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$      | <i>Equation de Maxwell Faraday</i> |
| $\text{div } \mathbf{B} = 0$                                      | <i>Equation de Maxwell flux</i>    |
| $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \partial \mathbf{D} / \partial t$ | <i>Equation de Maxwell Ampère</i>  |

$\mathbf{D}$  est le champ de déplacement électrique ( $\text{C m}^{-2}$ ).

Dans un milieu diélectrique Linéaire, Homogène et Isotrope (dit LHI),  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

La permittivité  $\varepsilon$  du milieu est un scalaire complexe invariable dans l'espace et le temps (mais qui peut dépendre de la pulsation de l'onde).

$\mathbf{P}$  est la polarisation du milieu ou moment dipolaire électronique par unité de volume induit par le champ électrique de l'onde ( $\text{C m}^{-2}$ ). En milieu LHI,  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$  où  $\chi$  est la susceptibilité du milieu, constante complexe (sans dimension) qui dépend de la pulsation de l'onde.

On a donc dans un milieu LHI:  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$

La combinaison des équations aboutit à l'équation de d'Alembert:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$$

La recherche d'OPPH de la forme  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  fournit la relation de dispersion:

$$k = (\omega / C) (1 + \chi)^{1/2} = n(\omega / C) \quad (k \text{ est complexe})$$

permettant de définir un indice de réfraction complexe  $n(\omega) = n_1 - i n_2 = (1 + \chi)^{1/2}$  et  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont respectivement les indices de dispersion et d'absorption.

La vitesse de phase de l'onde est  $v_\phi = C / n_1(\omega) = \omega / R_e(k)$  Elle peut être  $> C$ .

$R_e$  désigne la partie réelle.

La vitesse de groupe est par contre toujours  $< C$ :  $v_g = d\omega / dR_e(k) = C / [n_1 + \omega (dn_1/d\omega)]$

L'énergie se propage à la vitesse de groupe. Si le milieu n'est pas dispersif,  $dn_1/d\omega = 0$ , donc  $v_\phi = v_g = C / n_1$ .

Le champ magnétique associé à l'OPPH est  $\mathbf{B} = (k/\omega) \mathbf{E}$ ; la puissance transportée est donnée par le vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})/\mu_0$  dont la moyenne est:

$$\langle \Pi \rangle = 1/2 R_e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}^*)/\mu_0 = |\mathbf{E}|^2 / (2 \mu_0 \omega) R_e(k) = 1/2 \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 C n_1 = 1/2 \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 C^2 / v_\phi \quad \text{en } \text{W m}^{-2}$$

où \* désigne la quantité conjuguée. Une onde purement absorbée ( $k$  imaginaire pur,  $n_1 = 0$ ) ne propage pas d'énergie. Une onde évanescence ( $k$  complexe) en propage.

$\langle \Pi \rangle$  définit la densité d'énergie propagée par  $\langle \Pi \rangle = \langle \rho_E \rangle v_g$  d'où  $\langle \rho_E \rangle = 1/2 \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 C^2 / (v_\phi v_g)$

Dans un milieu non dispersif,  $v_\phi = v_g = C / n_1$ ,  $\langle \rho_E \rangle = 1/2 \varepsilon_0 n_1^2 |\mathbf{E}|^2$

*Exemple de milieu LHI: ondes dans un plasma d'électrons libres*

Un électron libre de masse  $m$  et de charge  $-e$  soumis à une onde électromagnétique de champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$  a pour équation du mouvement (PFD):

$$m d^2 \mathbf{r} / dt^2 = -e \mathbf{E}, \quad \text{d'où } \mathbf{r} = (e / m \omega^2) \mathbf{E} \quad (\text{car } d^2/dt^2 = -\omega^2 \text{ pour une solution en } e^{i\omega t})$$

La polarisation du milieu résulte de la superposition des dipôles de moment dipolaire  $\mathbf{p} = -e \mathbf{r}$ , soit:

$$\mathbf{P} = -N e \mathbf{r} \quad (\text{C m}^{-2}) \quad \text{où } N \text{ est le nombre d'électrons par unité de volume (m}^{-3}\text{)}.$$

On a donc  $\mathbf{P} = - (N e^2 / m \omega^2) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ ; le milieu est LHI de susceptibilité  $\chi = -\omega_p^2 / \omega^2$

où  $\omega_p = (N e^2 / \varepsilon_0 m)^{1/2}$  désigne la pulsation plasma électronique.

La relation de dispersion des ondes s'écrit:  $k^2 = \omega^2 / C^2 (1 + \chi) = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2 = n^2 (\omega / C)^2$

$\omega_p$  apparaît donc comme une pulsation de coupure en deçà de laquelle l'onde est absorbée ( $k$  imaginaire pur). Lorsque  $\omega > \omega_p$ ,  $k$  est réel pur, le plasma possède un indice de réfraction  $n$ :

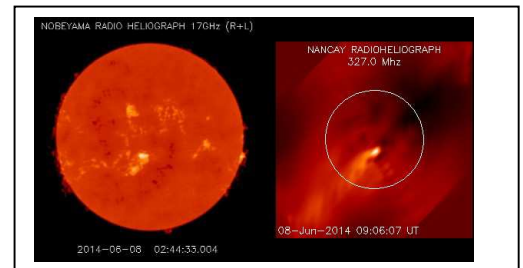
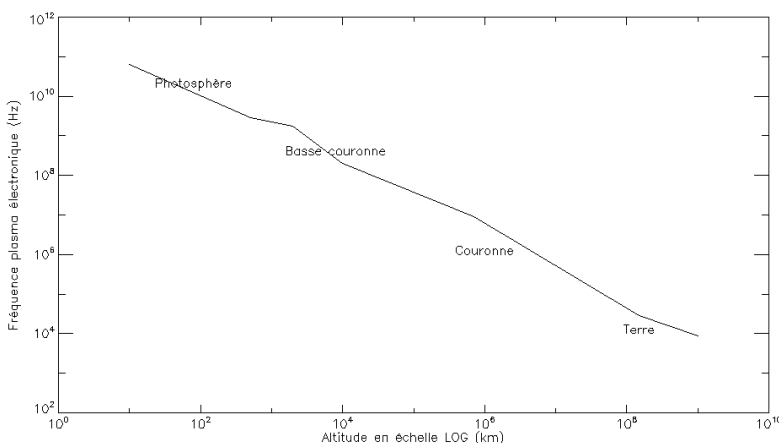
$$n = (1 - \omega_p^2 / \omega^2)^{1/2} < 1$$

La vitesse de phase  $v_\phi = C/n$  est donc  $> C$ ; cependant la vitesse de groupe  $v_g$ , liée à la vitesse de phase par la relation

$$v_g v_\phi = C^2 \text{ est toujours } < C.$$

Pour  $\omega > \omega_p$ ,  $\langle \Pi \rangle = |E|^2 / (2 \mu_0 \omega) k = |E|^2 / (2 \mu_0 v_\phi) = 1/2 \epsilon_0 |E|^2 (C^2 / v_\phi) = \boxed{1/2 \epsilon_0 |E|^2 v_g} \text{ (Wm}^{-2}\text{)}$

L'onde transporte donc l'énergie volumique  $\boxed{1/2 \epsilon_0 |E|^2} \text{ (J m}^{-3}\text{)}$  à la vitesse de groupe  $v_g$ .



Valeurs de  $v_p = \omega_p / 2\pi$  dans l'atmosphère solaire et observations du soleil à 17 GHz et à 327 MHz

**Application:** la fréquence plasma varie en  $N^{1/2}$ ; or la densité électronique  $N$  décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne du soleil. En observant avec les radiotélescopes à différentes fréquences, on explorera donc des couches atmosphériques stratifiées en altitude. Plus la fréquence est élevée, et plus on est proche de la surface de l'étoile.

## IV - Ondes stationnaires

L'équation de d'Alembert

$$\partial^2 E / \partial x^2 = (1/C^2) \partial^2 E / \partial t^2$$

possède des solutions stationnaires que l'on met facilement en évidence par séparation des variables en posant  $E(x,t) = X(x) T(t)$ , où  $X(x)$  et  $T(t)$  sont deux fonctions de  $x$  seul et de  $t$  seul.

Il vient alors  $d^2X/dx^2 = -k^2 X$  et  $d^2T/dt^2 = -\omega^2 T$  avec  $\omega = C k$

d'où  $E(x,t) = A \cos(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t)$

On obtient des noeuds fixes pour  $kx + \phi_x = \pi/2 + p\pi$  et des ventres fixes pour  $kx + \phi_x = p\pi$ ,  $p$  entier. Des modes de vibration discrets peuvent apparaître dans une cavité en imposant des conditions aux limites particulières. L'intérieur du soleil, par exemple, constitue une cavité; l'étude des modes de vibration de surface (héliosismologie) renseigne sur l'intérieur solaire. Une onde stationnaire ne propage pas d'énergie.

## V - Equations de Maxwell en régime stationnaire (ou permanent) dans un conducteur (ou dans le vide)

Dans le cas stationnaire,  $\partial/\partial t = 0$ ; on obtient:

|                                             |                                    |
|---------------------------------------------|------------------------------------|
| $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  | <i>Equation de Maxwell Gauss</i>   |
| $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$       | <i>Equation de Maxwell Faraday</i> |
| et                                          |                                    |
| $\text{div } \mathbf{B} = 0$                | <i>Equation de Maxwell flux</i>    |
| $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ | <i>Equation de Maxwell Ampère</i>  |

Les équations sont découplées en régime stationnaire. Dans le vide, on aurait  $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ .

L'équation de Maxwell Gauss indique que les charges statiques  $\rho$  constituent la source du champ électrique  $\mathbf{E}$ .

L'équation de Maxwell Ampère indique que les courants électriques permanents  $\mathbf{j}$  constituent la source du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

L'équation de Maxwell Faraday indique que le champ électrique  $\mathbf{E}$  est à circulation conservative: le théorème de Stokes montre que sa circulation sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  est nulle:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \iint \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

En régime stationnaire, on a  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$  et  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$

L'électrostatique, ou étude des champs électriques  $\mathbf{E}$  générés par des charges statiques  $\rho$ , est basée sur les deux premières équations.

La magnétostatique, ou étude des champs magnétiques  $\mathbf{B}$  générés par des courants permanents  $\mathbf{j}$ , est basée sur les deux dernières équations.

L'intensité du courant électrique  $I$  (unité: Ampère A) est le flux de la densité volumique de courant  $\mathbf{j}$  à travers la section  $S$  du conducteur ( $I$  est un scalaire, mais  $\mathbf{j}$  est un vecteur):

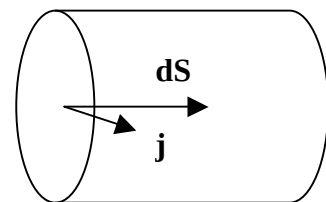
$$I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (I \text{ en A; } \mathbf{j} \text{ en A m}^{-2})$$

Pour un conducteur filiforme,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{S}$  sont colinéaires, on peut écrire:

$$I = j S$$

où  $S$  est la section du fil en  $\text{m}^2$

section  $S$  du  
conducteur

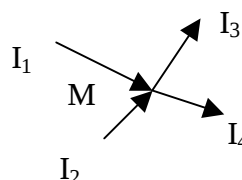


### Loi des noeuds

L'équation de conservation de la charge en régime statique devient  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  ou  $\iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$  sur une surface fermée  $S$ : c'est la loi des noeuds. Elle signifie que  $\mathbf{j}$  est à flux conservatif, autrement dit qu'à l'intérieur d'un volume fermé par une surface  $S$ , il n'y a pas d'accumulation de courant, soit:

*courants entrants = courants sortants*

loi des noeuds en M:  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$



## Electrostatique

De l'équation de Maxwell Gauss  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  et de  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ , on tire l'équation de Poisson:

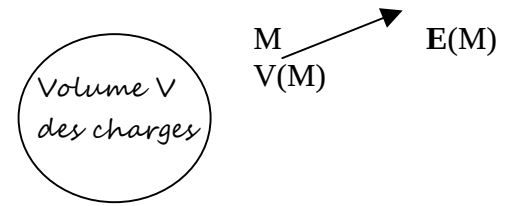
$$\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0$$

Dont la solution est

$$V(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \iiint [\rho/r] dv$$

Le volume  $V$  contient la charge

$$q = \iiint \rho dv$$



L'intégrale porte sur le volume  $V$  contenant les charges et  $r$  est la distance de la charge élémentaire  $dq = \rho dv$  située en  $P$  au point  $M$  où l'on considère son effet. On en tire pour le champ électrique:

$$\mathbf{E}(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \iiint [\rho \mathbf{u}/r^2] dv$$

$\mathbf{u}$  étant le vecteur unitaire orienté de la charge élémentaire  $dq = \rho dv$  située en  $P$  vers le point  $M$  où l'on recherche le champ électrique. En particulier,  $\mathbf{u} = \mathbf{PM}/\|\mathbf{PM}\|$  et  $\text{grad}(1/r) = -\mathbf{u}/r^2$ .

Pour une charge ponctuelle  $q$ , c'est la loi de Coulomb:

$$V(M) = (1/4\pi\epsilon_0) q/r \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(M) = (1/4\pi\epsilon_0) q \mathbf{u}/r^2$$

Les quantités élémentaires sont donc:  $dV = (1/4\pi\epsilon_0) \rho dv / r$  et  $d\mathbf{E} = (1/4\pi\epsilon_0) \rho dv \mathbf{u}/r^2$

La force exercée sur une charge  $q'$  par le champ électrique  $\mathbf{E}$  est  $\mathbf{F} = q' \mathbf{E}$

En conséquence, la force s'exerçant entre deux charges ponctuelles  $q$  et  $q'$  est  $\mathbf{F} = (1/4\pi\epsilon_0) q' q \mathbf{u}/r^2$

Elle est répulsive (charges de même signe) ou attractive (charges de signe opposé).

Le champ d'une charge ponctuelle vérifie  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  et l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$ .

## Magnétostatique

De l'équation de Maxwell Ampère  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  et de  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , en complétant par la jauge de Coulomb  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , on tire l'équation de Poisson du potentiel vecteur:

$$\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} = 0$$

Dont la solution est (par analogie avec l'équation de Poisson)

$$\mathbf{A}(M) = (\mu_0/4\pi) \iiint [\mathbf{j}/r] dv$$

l'intégrale portant sur le volume contenant les courants et  $r$  étant la distance des courants  $\mathbf{j}$  au point  $M$  où l'on considère ses effet. On en tire pour le champ magnétique la loi de Biot et Savart par  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , qui fournit après évaluation de  $\text{rot } (\mathbf{j}/r)$  :

$$\mathbf{B}(M) = (\mu_0/4\pi) \iiint [\mathbf{j} \wedge \mathbf{u}/r^2] dv$$

$\mathbf{u}$  étant le vecteur unitaire orienté du courant  $\mathbf{j}$  vers le point  $M$  où l'on étudie le champ magnétique.

Pour des courants filiformes dans lesquels circule un courant d'intensité  $i$ , la loi de Biot et Savart s'écrit aussi:

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) \int i \, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u} / r^2$$

de potentiel vecteur associé

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) \int [i \, d\mathbf{l} / r]$$

l'intégrale curviligne portant sur l'élément de courant  $d\mathbf{l}$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{PM} / \|\mathbf{PM}\|$  étant le vecteur unitaire orienté du courant élémentaire  $i \, d\mathbf{l}$  situé en P vers le point M où l'on calcule le champ magnétique.

Les champs élémentaires sont donc:  $d\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi) i \, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u} / r^2$  et  $d\mathbf{A} = (\mu_0/4\pi) i \, d\mathbf{l} / r$

Pour une charge ponctuelle  $q$  en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$  la loi de Biot et Savart devient:

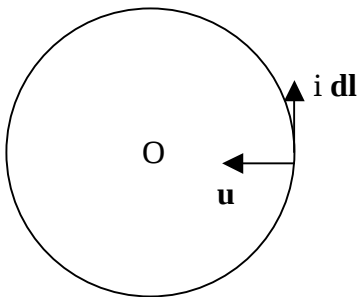
$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) q \, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} / r^2$$

de potentiel vecteur associé

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) q \, \mathbf{v} / r$$

toujours avec  $\mathbf{u} = \mathbf{PM} / \|\mathbf{PM}\|$  si la charge est située au point P.

*Un exemple simple d'application de la loi de Biot et Savart: champ magnétique au centre d'une spire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $i$*



$$d\mathbf{B}(\mathbf{O}) = (\mu_0/4\pi) i \, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u} / R^2$$

$d\mathbf{l}$  et  $\mathbf{u}$  sont orthogonaux,  $d\mathbf{B}$  est orthogonal au plan de la figure (produit vectoriel, règle des doigts)

$$dB(\mathbf{O}) = (\mu_0/4\pi) i \, dl / R^2$$

$$\text{or } dl = R \, d\theta, \text{ d'où } B(\mathbf{O}) = (\mu_0/4\pi) \int_0^{2\pi} i \, d\theta / R$$

$$B(\mathbf{O}) = \mu_0 i / 2 R$$

*Cas magnétostatiques particuliers: champ "potentiel" et "sans force" dans le vide*

Dans le vide, sans courant ( $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ), l'équation de Maxwell Ampère s'écrit  $\mathbf{rot} \, \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

En astrophysique, il existe des champs sans courant: on les appelle "champs potentiels". En calculant,  $\mathbf{rot} \, (\mathbf{rot} \, \mathbf{B})$  sachant que  $\text{div} \, \mathbf{B} = 0$ , on obtient l'équation de Laplace dont  $\mathbf{B}$  est solution:

$$\Delta \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{rot} \, \mathbf{B} = \mathbf{0}$  implique que  $\mathbf{B}$  dérive d'une fonction potentiel  $\varphi$  telle que

$$\mathbf{B} = \mathbf{grad} \, \varphi$$

*Champs potentiels dans un plan (xOy)*

Dans un espace à deux dimensions (plan xOy), avec  $\mathbf{B} (B_x, B_y, 0)$  dépendant seulement des coordonnées  $x$  et  $y$  de l'espace, on peut écrire  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \, \mathbf{A}$  où  $\mathbf{A} = \psi(x,y) \, \mathbf{e}_z$ , ce qui implique puisque  $\mathbf{rot} [\psi(x,y) \, \mathbf{e}_z] = \psi(x,y) \, \mathbf{rot} [\mathbf{e}_z] + \mathbf{grad} \, \psi \wedge \mathbf{e}_z$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{grad} \, \psi \wedge \mathbf{e}_z \quad \text{avec } \mathbf{grad} \, (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0).$$

$$\begin{cases} B_x = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ B_y = \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \end{cases}$$

Les lignes du champ magnétique sont telles que  $\mathbf{B} = k \, d\mathbf{OM}$  ( $k$  constante quelconque exprimant la colinéarité entre  $\mathbf{B}$  et la ligne de champ); elles sont donc données par l'équation  $dy/dx = B_y/B_x$ , soit:

$$dy/dx = - (\partial\psi/\partial x) / (\partial\psi/\partial y)$$

d'où  $(\partial\psi/\partial x) dx + (\partial\psi/\partial y) dy = 0$ , c'est à dire  $\psi(x,y) = \text{constante}$

Quant aux lignes équipotentielles, elles sont données par  $\phi(x,y) = \text{constante}$ , et en conclusion:

$\phi(x,y) = \text{constante}$  est l'équation des lignes équipotentielles  
 $\psi(x,y) = \text{constante}$  est l'équation des lignes de champ

De l'égalité  $\mathbf{B} = \mathbf{grad} \, \phi = (\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y) = \mathbf{grad} \, \psi \wedge \mathbf{e}_z = (\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x)$ ,

on voit que les fonctions  $\phi(x,y)$  et  $\psi(x,y)$  obéissent aux conditions de Cauchy:

$$\begin{cases} \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \end{cases}$$

impliquant que ces fonctions sont harmoniques:  $\Delta\phi = \Delta\psi = 0$

Définissons le potentiel complexe:  $f(x,y) = \phi(x,y) + i \psi(x,y)$

et introduisons les variables complexes  $z = x + i y$  et  $z^* = x - i y$  (quantité conjuguée).

On a les relations réciproques  $x = (z + z^*) / 2$  et  $y = (z - z^*) / (2i)$  de sorte que le potentiel complexe est aussi fonction de  $z$  et  $z^*$ :  $f(x,y) = f(z, z^*)$ . Calculons  $\partial f/\partial z^*$ :

$$\partial f/\partial z^* = \partial f/\partial x \, \partial x/\partial z^* + \partial f/\partial y \, \partial y/\partial z^* = 1/2 \, \partial f/\partial x + (i/2) \, \partial f/\partial y$$

Avec  $f = \phi + i \psi$ , on obtient:  $\partial f/\partial z^* = 1/2 (\partial\phi/\partial x + i \partial\psi/\partial x) + (i/2) (\partial\phi/\partial y + i \partial\psi/\partial y)$

Utilisons les conditions de Cauchy ci dessus entre  $\phi$  et  $\psi$ :

$$\partial f/\partial z^* = 1/2 (\partial\phi/\partial x - i \partial\phi/\partial y) + (i/2) (\partial\phi/\partial y + i \partial\phi/\partial x) = 1/2 (\partial\phi/\partial x - i \partial\phi/\partial y + i \partial\phi/\partial y - \partial\phi/\partial x) = 0$$

Le potentiel complexe  $f = \phi + i \psi$  est une fonction analytique de la seule variable  $z = x + i y$

Evaluons maintenant  $\partial f/\partial z$ :

$$\partial f/\partial z = \partial f/\partial x \, \partial x/\partial z + \partial f/\partial y \, \partial y/\partial z = 1/2 \, \partial f/\partial x - (i/2) \, \partial f/\partial y$$

Avec  $f = \phi + i \psi$ , on obtient:  $\partial f/\partial z = 1/2 (\partial\phi/\partial x + i \partial\psi/\partial x) - (i/2) (\partial\phi/\partial y + i \partial\psi/\partial y)$

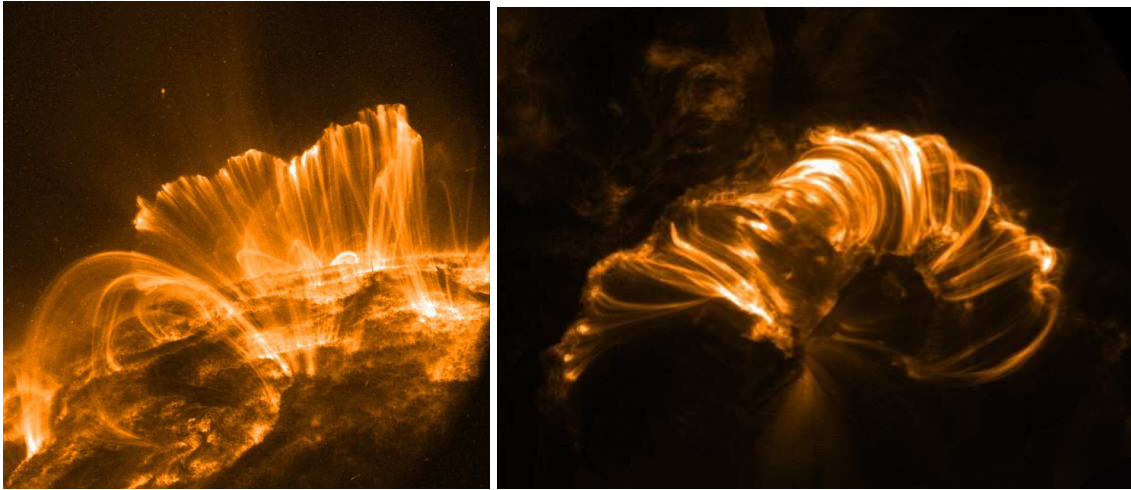
Utilisons de nouveau les conditions de Cauchy entre  $\phi$  et  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \partial f/\partial z &= 1/2 (\partial\phi/\partial x - i \partial\phi/\partial y) - (i/2) (\partial\phi/\partial y + i \partial\phi/\partial x) = 1/2 (\partial\phi/\partial x - i \partial\phi/\partial y - i \partial\phi/\partial y + \partial\phi/\partial x) \\ &= \partial\phi/\partial x - i \partial\phi/\partial y = B_x - i B_y \end{aligned}$$

Conclusion: le champ magnétique complexe défini par  $B = B_x - i B_y$  dérive d'une fonction potentiel  $f(z)$  analytique quelconque telle que

$$B = B_x - i B_y = df(z)/dz$$

N'importe quelle fonction  $f(z) = \phi(z) + i \psi(z)$  convient pourvu qu'elle ait un sens physique.



*Arcades de champ magnétique à la surface du soleil (satellite TRACE/NASA)*

Il existe aussi des champs "sans force", c'est à dire pour lesquels la force de Laplace  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  est nulle. C'est le cas lorsque le courant  $\mathbf{j}$  est colinéaire au champ magnétique  $\mathbf{B}$ , soit  $\mu_0 \mathbf{j} = \alpha \mathbf{B}$ ,  $\alpha$  étant une constante.  $\mathbf{B}$  est alors solution de  $\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$ . En prenant le rotationnel, sachant que  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , on obtient l'équation d'Helmoltz dont  $\mathbf{B}$  est solution:

$$\Delta \mathbf{B} + \alpha^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Pour résoudre cette équation dans le plan (xOy), on pose:

$$\mathbf{B}(x,y) = \alpha \text{rot}(f \mathbf{e}_z) + \text{rot rot}(f \mathbf{e}_z)$$

où  $f$  est un "pseudo potentiel" fonction de  $x$  et de  $y$  seulement (symétrie de translation selon  $Oz$ ).

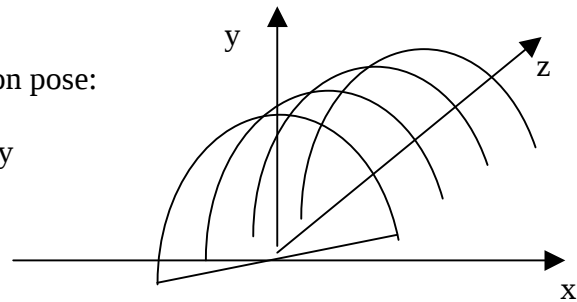
Développons:

$$\text{rot}(f \mathbf{e}_z) = f \text{rot}(\mathbf{e}_z) + \text{grad } f \wedge \mathbf{e}_z = \text{grad } f \wedge \mathbf{e}_z$$

et

$$\text{rot rot}(f \mathbf{e}_z) = \text{grad div}(f \mathbf{e}_z) - \Delta f \mathbf{e}_z = -\Delta f \mathbf{e}_z$$

car  $\text{div}(f \mathbf{e}_z)$  est nul puisque  $f$  ne dépend pas de  $z$ .



On a donc:  $\mathbf{B}(x,y) = \alpha \text{grad } f \wedge \mathbf{e}_z - \Delta f \mathbf{e}_z$  d'où les coordonnées:  $\mathbf{B} ( \alpha \partial f / \partial y, -\alpha \partial f / \partial x, -\Delta f )$

De  $\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$ , on tire alors deux équations:

$$\begin{cases} \partial(\Delta f + \alpha^2 f) / \partial y = 0 \\ \partial(\Delta f + \alpha^2 f) / \partial x = 0 \end{cases}$$

qui se résume à une unique équation d'Helmoltz pour le "pseudo potentiel"  $f(x,y)$ :

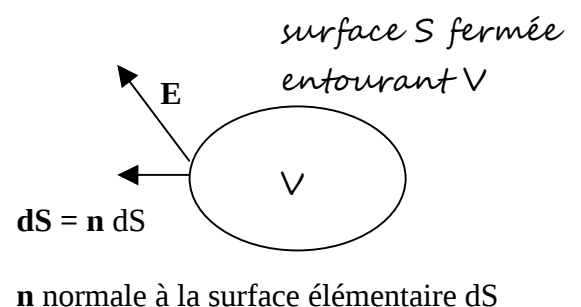
$$\Delta f + \alpha^2 f = 0$$

### *Théorème de Gauss de l'électrostatique*

Imaginons un volume  $V$  entouré par une surface  $S$  fermée et contenant une distribution volumique de charges  $\rho(x, y, z)$ .

Intégrons l'équation de Maxwell Gauss  $\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$  sur ce volume  $V$ :

La charge intérieure à  $V$  est  $q = \iiint_V \rho \, dv$



$\mathbf{n}$  normale à la surface élémentaire  $dS$

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv = \iiint [\rho/\epsilon_0] \, dv = q / \epsilon_0$$

Le théorème d'Ostrogradski indique que  $\iiint \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  d'où le théorème de Gauss:

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma \text{ charges intérieures} / \epsilon_0 \quad (\text{charge mesurée en C})$$

Le flux du champ électrique  $\mathbf{E}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à la somme des charges intérieures au volume  $V$  entouré par cette surface divisée par  $\epsilon_0$

Ce théorème est très utilisé pour déterminer le champ électrique lorsque les symétries du problème permettent de calculer aisément son flux.

### Lignes du champ électrique

Le champ électrique  $\mathbf{E}$  est tangent en tout point  $M$  d'une ligne de champ.

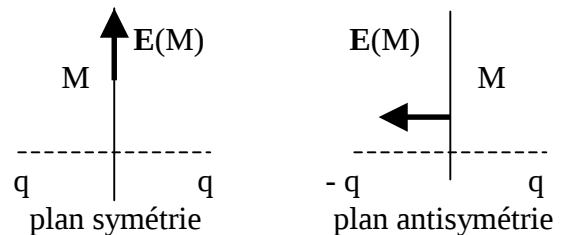
Comme  $d\mathbf{OM} = (dx, dy, dz)$  est tangent en  $M$  à la ligne de champ, alors  $\mathbf{E} = k \, d\mathbf{OM}$ , où  $k$  est un nombre réel quelconque. En éliminant  $k$ , on obtient le système d'équations différentielles:

$$dx/E_x = dy/E_y = dz/E_z$$

$V$  étant le potentiel,  $dV = \mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{OM} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{OM} < 0$  en suivant une ligne de champ. Ainsi, le potentiel électrostatique décroît le long d'une ligne de champ.

### Symétries du champ électrique

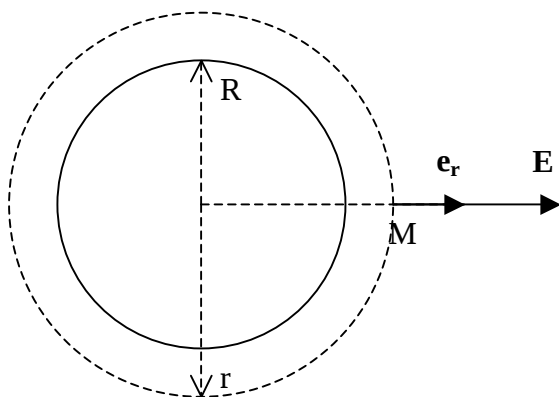
le champ électrique  $\mathbf{E}$  est  
dans le plan de symétrie des charges,  
ou orthogonal au plan d'antisymétrie des charges.



### Lignes ou surfaces équipotentielles

Le potentiel  $V$  est constant sur une ligne équipotentielle. Comme  $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{OM} = 0$ ,  $d\mathbf{OM}$  étant tangent à la ligne équipotentielle,  $\mathbf{E}$  et  $d\mathbf{OM}$  sont orthogonaux. Ainsi, les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

*Exemple d'application du théorème de Gauss: champ électrique d'une sphère uniformément chargée en surface*



On considère une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée en surface. La densité surfacique de charge  $\sigma$  ( $\text{C m}^{-2}$ ) est uniforme, la sphère porte la charge  $q = \sigma 4 \pi R^2$ . Déterminer  $\mathbf{E}(M)$  en tout point  $M$  de l'espace se fait en plusieurs étapes à respecter:

- (1) invariances: le problème est à symétrie sphérique et dépend de la seule variable radiale  $r$   
 $\rightarrow \mathbf{E} = E(r)$
- (2) symétries: tout plan passant par le centre de la sphère est plan de symétrie des charges  
 $\rightarrow \mathbf{E}$  est radial,  $\mathbf{E} = E(r) \mathbf{e}_r$

(3) on définit une surface de Gauss: sphère de rayon  $r$ ;

le flux de  $\mathbf{E}(r)$  à travers cette surface orientée vers l'extérieur est égal à  $4 \pi r^2 E(r)$

(4) espace  $r > R$ :  $4 \pi r^2 E(r) = \text{charge intérieure} / \epsilon_0 = q / \epsilon_0 = \sigma 4 \pi R^2 / \epsilon_0 \rightarrow \boxed{E(r) = (\sigma / \epsilon_0) R^2 / r^2}$

(5) espace  $r < R$ :  $4 \pi r^2 E(r) = \text{charge intérieure} = 0 \rightarrow \boxed{E(r) = 0}$

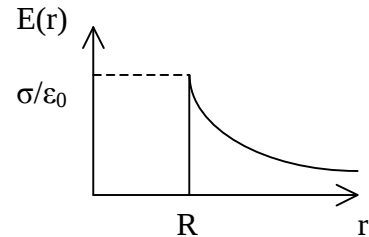
$\rightarrow$  A la surface de la sphère  $\boxed{E(R) = \sigma / \epsilon_0}$

C'est le théorème de Coulomb.

Le potentiel  $V(r)$  s'obtient par  $E(r) = -dV/dr$  sachant que  $V(\infty)=0$ .

$r > R$ :  $V(r) = (\sigma / \epsilon_0) R^2 / r$

$r < R$ :  $V(r) = \text{constante} = (\sigma / \epsilon_0) R$



Le champ électrique est discontinu en  $r = R$ ; par contre le potentiel est toujours continu.

### Dipôle électrostatique

Deux charges opposées,  $+q$  en  $A_+$  et  $-q$  en  $A_-$ , constituent un dipôle électrique, de moment dipolaire  $\mathbf{p} = q \mathbf{A}A_+$  (unité: C m)

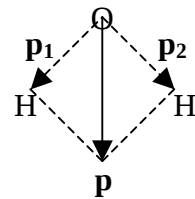
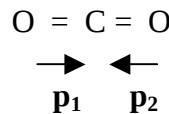
Certaines molécules sont polaires, comme  $H_2O$

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$

D'autres sont apolaires, comme  $CO_2$

(somme de deux moments dipolaires opposés)

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$



La polarisation du milieu  $\mathbf{P}$  est la somme de tous les moments dipolaires individuels  $\mathbf{p}$ ; elle est statistiquement nulle, même pour  $H_2O$ , car toutes les orientations de  $\mathbf{p}$  sont possibles. Cependant, en présence d'un champ électrique extérieur  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ ,  $\mathbf{P}$  n'est plus nul.

Les molécules subissent un couple de forces  $\boxed{\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}}$  et s'alignent dans la direction  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$

En effet,  $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{OA}_+ \wedge (q \mathbf{E}_{\text{ext}}) + \mathbf{OA}_- \wedge (-q \mathbf{E}_{\text{ext}}) = (\mathbf{OA}_+ - \mathbf{OA}_-) \wedge (q \mathbf{E}_{\text{ext}}) = q \mathbf{A}A_+ \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}$

Elle acquièrent une énergie potentielle  $\boxed{E_p = - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}} = - p E_{\text{ext}} \cos \theta}$

La distribution angulaire  $\theta$  des moments dipolaires individuels  $\mathbf{p}$  autour de  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  est non uniforme (loi de Boltzmann en  $e^{-E_p/kT}$ ), ce explique l'apparition d'une polarisation globale  $\mathbf{P}$  dont on peut montrer qu'elle est proportionnelle à  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ : on est en présence d'un milieu diélectrique linéaire.

Le potentiel créé par le dipôle à grande distance est

$$\boxed{V(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} / r^2}$$

où  $r$  est la distance du point  $M$  au dipôle et  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire  $\mathbf{u} = \mathbf{PM} / \|\mathbf{PM}\|$

Le champ électrique à grande distance sera  $\boxed{\mathbf{E}(M) = - (1/4\pi\epsilon_0) \text{grad} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} / r^2)}$

## Théorème d'Ampère de la magnétostatique

Imaginons une surface  $S$  s'appuyant sur un contour  $\mathcal{C}$  fermé et orienté, et traversée par une distribution volumique de courants  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

Intégrons l'équation de Maxwell Ampère  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  sur cette surface  $S$ :

L'intensité enlacée est est  
où  $d\mathbf{S}$  est orientée par  $\mathcal{C}$

$$I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

Le théorème de Stokes indique que:

$\iint \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  d'où le théorème d'Ampère:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Sigma \text{ Intensités enlacées}$$

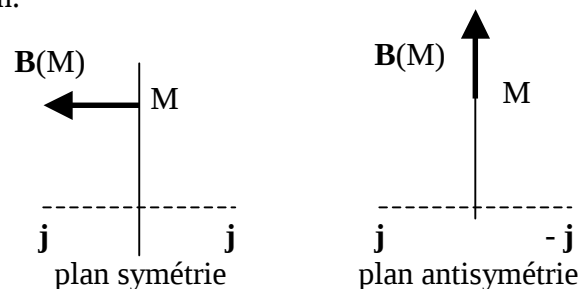
(intensité mesurée en A)

La circulation du champ magnétique  $\mathbf{B}$  sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  est égal à la somme des intensités enlacées par ce contour multipliée par  $\mu_0$

Ce théorème est très utilisé pour déterminer le champ magnétique lorsque les symétries du problème permettent de calculer aisément sa circulation.

### Symétries du champ magnétique

le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est dans le plan d'antisymétrie des courants, ou orthogonal au plan de symétrie des courants.

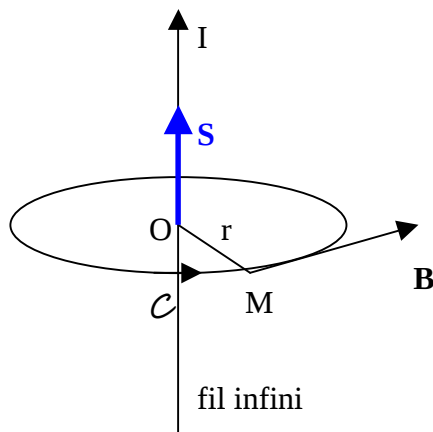


### Lignes du champ magnétique

Comme en électrostatique, elles sont données par  $\mathbf{B} = k \, d\mathbf{OM}$  où  $d\mathbf{OM} = (dx, dy, dz)$  est tangent en M à la ligne de champ,  $k$  nombre réel indiquant la colinéarité, d'où:

$$dx/B_x = dy/B_y = dz/B_z$$

Premier exemple d'application du théorème d'Ampère: champ magnétique créé par un fil infini



On procède en plusieurs étapes:

- (1) invariances: le problème est à symétrie cylindrique; il ne dépend que de la variable radiale  $r$   
 $\rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}(r)$
- (2) symétries: le plan contenant le point M et le fil est un plan de symétrie des courants,  $\mathbf{B}$  y est donc orthogonal  
 $\rightarrow \mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\theta$  est orthoradial

(3) on définit un contour  $\mathcal{C}$ , ici cercle de rayon  $r$ , ayant le fil pour axe, orienté de sorte qu'il définisse un vecteur surface  $\mathbf{S}$  dans le sens du courant  $I$

- Orientation du contour (règle de la main droite): pouce sur  $\mathcal{C}$ , l'index vise  $O$ , majeur =  $\mathbf{S}$

- Orientation de  $\mathbf{B}$  (règle de la main droite): pouce sur  $I$ , l'index vise  $M$ , majeur =  $\mathbf{B}$  (la formule de Biot et Savart indique en effet que  $d\mathbf{B}$  est proportionnel à  $I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}$ , où  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire de  $O$  vers  $M$ ,  $I d\mathbf{l}$  étant un élément de courant)

(4) Circulation de  $B$  sur le contour  $\mathcal{C}$ :  $B 2 \pi r$

(5) Courant enlacé par le contour  $\mathcal{C}$ :  $I \rightarrow B 2 \pi r = \mu_0 I \rightarrow \boxed{B(r) = \mu_0 I / (2 \pi r)}$

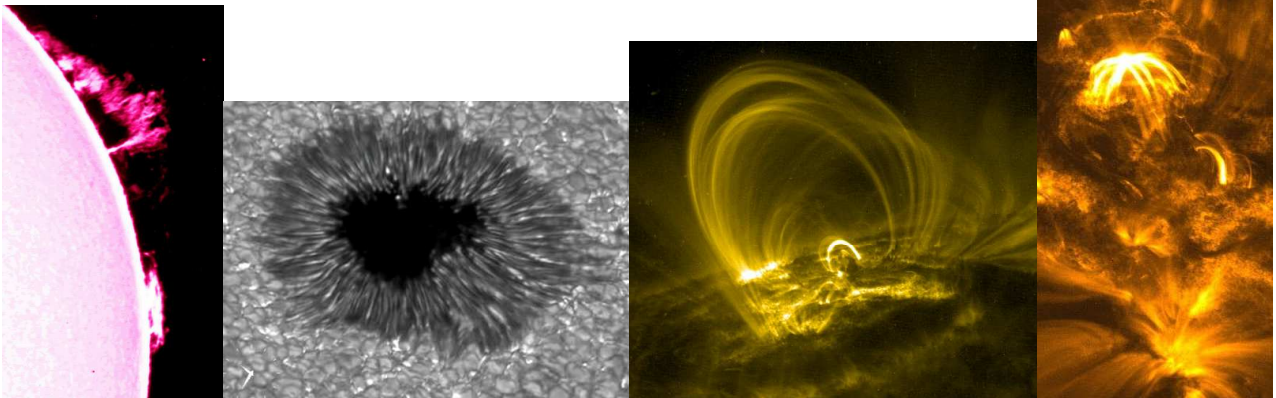
Potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ : on sait qu'il est porté par le courant puisque  $d\mathbf{A}$  est proportionnel à  $I d\mathbf{l}$ .

Posons alors  $\mathbf{A} = A(r) \mathbf{e}_z$  où désigne un vecteur unitaire sur l'axe du fil infini.

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot} [A(r) \mathbf{e}_z] = A(r) \cancel{\text{rot } \mathbf{e}_z} + \text{grad } A(r) \wedge \mathbf{e}_z = -dA/dr \mathbf{e}_\theta$$

d'où  $dA/dr = -\mu_0 I / (2 \pi r)$  et par intégration  $\boxed{A(r) = -(\mu_0 I / 2 \pi) \ln(r) + \text{constante}}$

Le potentiel diverge à l'infini, en raison de la présence de courants à l'infini.  
I



Quelques manifestations des champs magnétiques dans l'atmosphère solaire

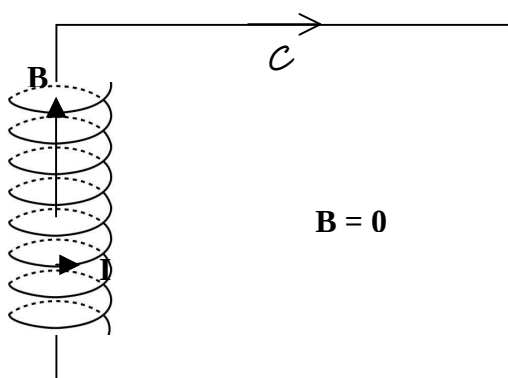
(1) protubérance: champ faible (environ 0.001 Tesla)

(2) tache solaire: champ fort,  $B = 0.1$  à  $0.2$  Tesla

(3) boucle de champ magnétique reliant deux taches de polarités opposées, champ décroissant des pieds (ancrage dans les taches) vers le sommet, hauteur voisine de 100 000 km

(4) éruption: libération d'énergie magnétique au sein de configurations magnétiques instables

Second exemple d'application du théorème d'Ampère : le solénoïde infini

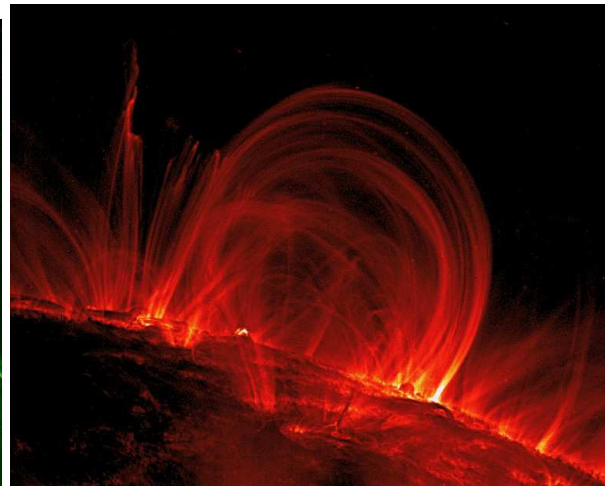
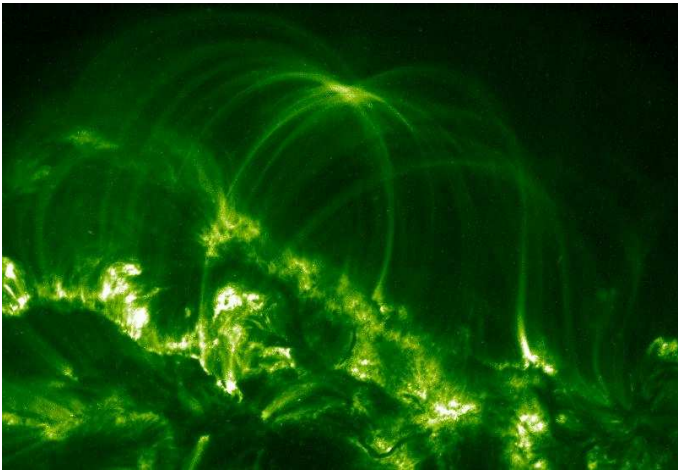


Le solénoïde est parcouru par un courant d'intensité  $I$  et sa longueur est  $l \rightarrow \infty$ ; son nombre de spires par unité de longueur est  $n$

- Circulation de  $B$  sur le contour  $\mathcal{C}$ :  $B l$

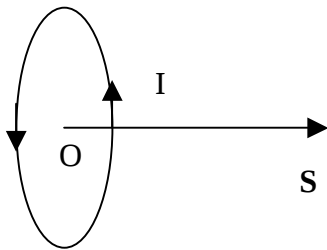
- Courant enlacé par le contour  $\mathcal{C}$ :  $(n l) I$  car le courant total traversant la surface enlacée par le contour est  $I \times \text{nombre de spires}$

$$\rightarrow \boxed{B = \mu_0 n I}$$



*Des boucles de champ magnétique à la surface du soleil (satellite TRACE/NASA)*

### Dipôle magnétique



Moment magnétique d'une spire de surface  $S$  parcourue par un courant électrique  $I$

$$\mathbf{M} = I \mathbf{S}$$

$\mathbf{S}$  est le vecteur surface de la spire, orienté par le sens du courant  $I$  (règle des doigts: pouce sur  $I$ , l'index vise  $O$ , majeur =  $\mathbf{S}$ )

A grande distance, la spire de courant constitue un dipôle magnétique. Le potentiel vecteur créé par ce dipôle est, au point  $M$  placé à grande distance:

$$A(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) \mathbf{M} \wedge \mathbf{u} / r^2$$

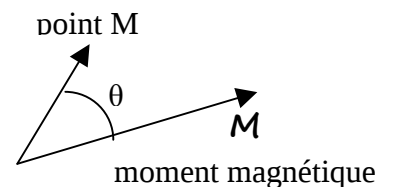
où  $r$  est la distance du point  $O$  (centre du dipôle) au point  $M$  et  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire  $\mathbf{u} = \mathbf{OM} / \|\mathbf{OM}\|$

Le champ magnétique à grande distance  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  est  $\mathbf{B}(\mathbf{M}) = - (\mu_0/4\pi) \text{grad} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} / r^2)$

Plaçons nous dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $\theta$  désignant l'angle entre le moment magnétique  $\mathbf{M}$  et le vecteur de position  $\mathbf{OM}$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = - (\mu_0/4\pi) \mathbf{M} \left[ \frac{\partial(\cos\theta / r^2)}{\partial r}, (1/r) \frac{\partial(\cos\theta / r^2)}{\partial \theta} \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = (\mu_0/4\pi) (\mathbf{M} / r^3) [2 \cos\theta, \sin\theta]$$



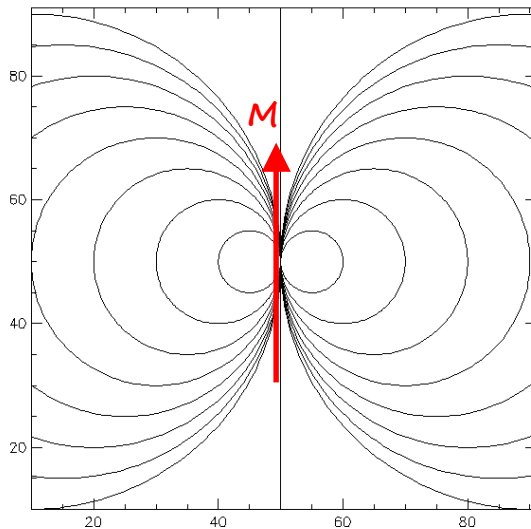
- Dans la direction du moment magnétique du dipôle,  $B(r,0) = 2 (\mu_0/4\pi) (\mathbf{M} / r^3)$

- Dans la direction orthogonale,  $B(r,\pi/2) = (\mu_0/4\pi) (\mathbf{M} / r^3)$  est deux fois moindre

- Lignes de champ: on écrit  $\mathbf{B} = k \, d\mathbf{OM}$  ( $k$  réel quelconque) soit, en éliminant  $k$ :

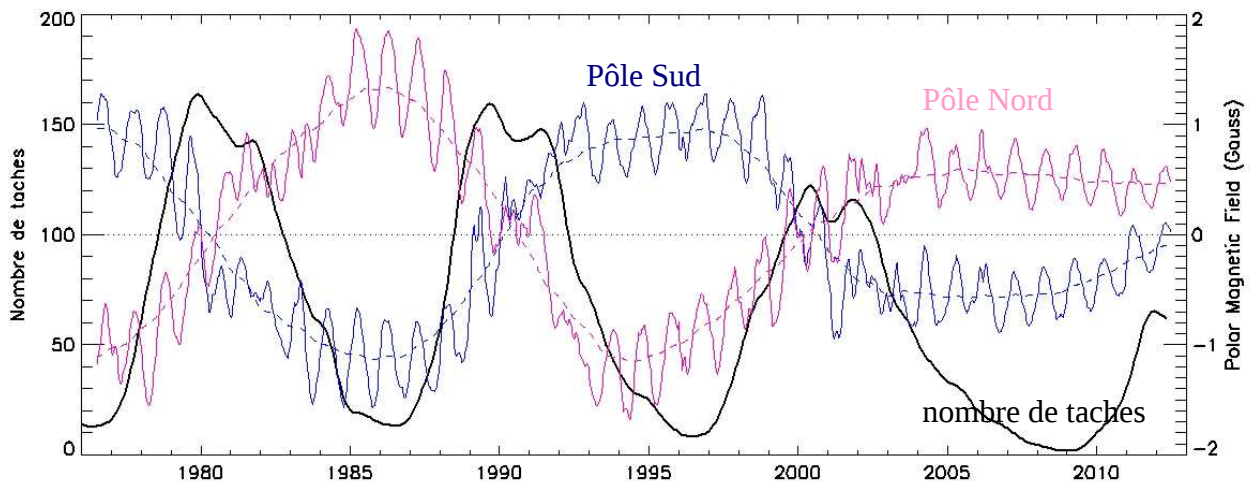
$$dr / B_r = r \, d\theta / B_\theta \rightarrow dr / 2 \cos\theta = r \, d\theta / \sin\theta, \text{ ce qui donne par intégration: } r = \sin^2\theta \times \text{Cte}$$

## Application: champ magnétique terrestre et champ magnétique solaire



Ci contre: lignes de champ magnétique du dipôle (valable seulement à grande distance).

Le champ magnétique dipolaire de la Terre ou du Soleil est proche de celui d'un dipôle porté par l'axe Nord Sud. Le champ est vertical aux pôles, et y est deux fois plus intense qu'à l'équateur où il est horizontal, comme le montre la théorie ci dessus. Dans le cas de la Terre ou du Soleil, le champ dipolaire est de l'ordre de  $10^{-4}$  T.



Le champ dipolaire du Soleil est cyclique: il se renverse tous les 11 ans pour former un cycle magnétique de 22 ans. Ci dessus, les observations des champs des pôles Nord et Sud (Wilcox).

### Couple et énergie du dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur

L'énergie potentielle est définie par  $E_p = - \mathbf{I} \Phi$  où  $\Phi = \iint \mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{S}$  est le flux magnétique; sur la surface petite d'un dipôle,  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  est uniforme et  $E_p = - \mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot \iint \mathbf{I} d\mathbf{S} = - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}$

Un dipôle dans un champ magnétique acquiert donc une énergie potentielle  $E_p = - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}$

Il subit une force  $\mathbf{F} = \text{grad} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}) = - \text{grad} E_p$  qui est nulle si le champ est uniforme.

Si le dipôle peut pivoter sur lui même,  $dE_p = - d\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}$  où  $d\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} dt \wedge \mathbf{M}$  avec  $\boldsymbol{\Omega}$  vecteur vitesse angulaire. Alors  $dE_p = - (\boldsymbol{\Omega} dt \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = - (\mathbf{M} \wedge \mathbf{B}_{\text{ext}}) \cdot \boldsymbol{\Omega} dt = - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Omega} dt$  (produit mixte invariant par permutation circulaire).

Un dipôle placé dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  subit un couple de forces  $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B}_{\text{ext}}$  et s'aligne dans la direction de  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ : c'est l'exemple bien connu de l'aiguille aimantée de la boussole, de moment magnétique  $\mathbf{M}$ , qui s'oriente dans la direction du champ magnétique terrestre.

## VI - Loi d'OHM

### Loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur fixe

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

où  $\gamma$  est la conductivité du milieu en Siemens  $\text{m}^{-1}$  (inverse de la résistivité, mesurée en  $\Omega \text{ m}$ ).

Exemples de valeurs de conductivité (inverse de la résistivité):

- métaux (très conducteurs):  $10^7 \text{ S m}^{-1}$
- atmosphère solaire:  $\gamma = 8 \cdot 10^{-4} T^{3/2} \text{ S m}^{-1}$  où  $T$  est la température en K du milieu  
Photosphère et chromosphère (10000 K) :  $\gamma \approx 10^3 \text{ S m}^{-1}$   
couronne ( $10^6 \text{ K}$ ) :  $\gamma \approx 10^6 \text{ S m}^{-1}$
- eau de mer:  $5 \text{ S m}^{-1}$
- eau douce:  $0.05 \text{ S m}^{-1}$
- verre (isolant):  $10^{-17} \text{ S m}^{-1}$

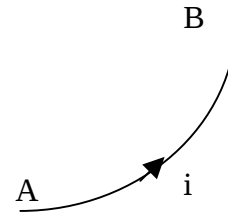
### Loi d'Ohm pour un circuit filiforme

Si le conducteur est filiforme entre A et B,

la loi d'Ohm s'écrit  $V_A - V_B = R i$

où  $R = l / \gamma s$  est la résistance du fil en Ohms ( $\Omega$ ),

entre A et B,  $l$  étant sa longueur (m) et  $s$  sa section ( $\text{m}^2$ )



### Loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur mobile

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de déplacement du conducteur. Le second terme  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ , dit champ électromoteur, provient du fait que le conducteur "voit" dans son propre référentiel un champ électrique  $\mathbf{E}'$  différent de celui ( $\mathbf{E}$ ) qui existe dans le référentiel fixe (ce n'est pas le cas pour le champ magnétique).

En effet, dans un référentiel mobile à la vitesse  $\mathbf{v}$ , on montre que le champ électrique  $\mathbf{E}'$  vaut:  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  alors que le champ magnétique  $\mathbf{B}'$  reste égal à  $\mathbf{B}$ , champ du repère fixe (cette relation n'est exacte que dans le cadre de la transformation de Galilée, lorsque  $v \ll c$ ; dans le cas contraire il faut utiliser la transformation de Lorentz en relativité restreinte, hors programme).

## VII - ARQS dans un conducteur et induction magnétique

Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), les équations de Maxwell s'écrivent:

|                                                               |                                     |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$                  | Equation de Maxwell Gauss           |
| $\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$ | Equation de Maxwell Faraday         |
| $\text{div } \mathbf{B} = 0$                                  | Equation de Maxwell Thomson ou flux |
| $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$                   | Equation de Maxwell Ampère          |

On a négligé le courant de déplacement  $\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  dans l'équation de Maxwell Ampère. La suppression de ce terme empêche la propagation d'ondes électromagnétiques. Cette approximation est valable à condition que:

$$T_p \text{ temps de propagation} = L/C \ll T \text{ temps caractéristique d'évolution du système}$$

où  $C$  est la vitesse de la lumière et  $L$  la dimension caractéristique du système.

La condition  $L \ll C T$  signifie aussi  $v \ll C / L$  pour une variation sinusoïdale à la fréquence  $v$ ;

l'ARQS n'est donc valable aux basses fréquences.

Pour un circuit mobile de vitesse  $v$ ,  $L \ll C T$  signifie aussi  $v \ll C$ .

L'hypothèse ARQS implique la loi des noeuds  $\text{div } \mathbf{j} = 0$

en prenant la divergence de l'équation Maxwell Ampère (la divergence d'un rotationnel étant nulle). Or dans un conducteur fixe,  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  (loi d'Ohm), donc  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  implique  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  (en supposant la conductivité uniforme). Mais  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  implique  $\rho = 0$ : un conducteur en ARQS est globalement neutre (il y a autant de charges positives que négatives).

## Loi de Faraday

Considérons un circuit fermé  $\mathcal{C}$  et prenons le flux de l'équation de Maxwell Faraday sur la surface  $S$  appuyée sur son contour:

$$\iint \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \partial [ \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} ] / \partial t$$

En appliquant le théorème de Stokes, il vient:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e = - \partial \Phi(\mathbf{B}) / \partial t$$

C'est la loi de Faraday.

$e$  est la force électromotrice d'induction (fem).

$\Phi(\mathbf{B}) = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  est le flux du champ magnétique  $\mathbf{B}$  à travers la surface  $S$  du circuit.

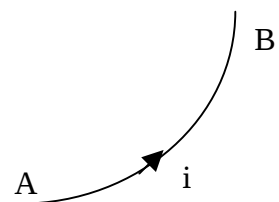
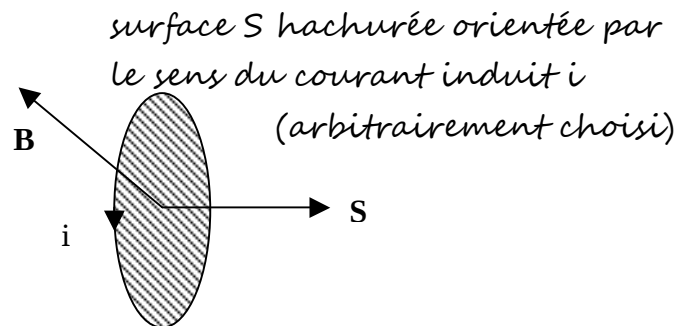
La fem d'induction  $e$  se mesure en Volts. Elle n'existe que si le flux  $\Phi(\mathbf{B})$  du champ magnétique  $\mathbf{B}$  à travers le circuit varie dans le temps, ou bien si le circuit se déplace dans un champ constant.  $\Phi(\mathbf{B})$  porte dans ce cas le nom de flux coupé lors du déplacement.

## Loi d'Ohm généralisée pour un circuit filiforme AB

la loi d'Ohm généralisée s'écrit  $V_A - V_B = R i - e$

où  $R$  est la résistance du fil en Ohms ( $\Omega$ ) et  $e = - \partial [ \int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} ] / \partial t$

Si le circuit est fermé:  $A = B$ , l'intégrale porte sur un contour fermé.



Dans ce cas,  $V_A = V_B$  et  $e = -\partial[\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}]/\partial t = -\partial[\int \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}]/\partial t$  (d'après le théorème de Stokes).

Donc  $e = -\partial[\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}]/\partial t = -\partial\Phi(\mathbf{B})/\partial t$  et on retrouve ainsi la loi de Faraday.

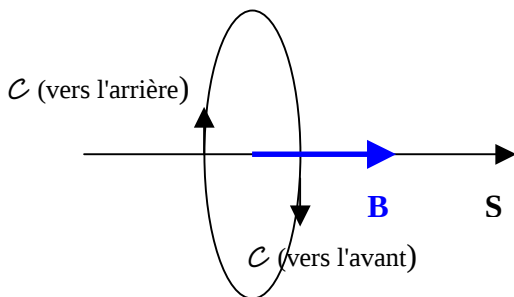
Il apparaît un courant induit dans le circuit:  $i = e/R$  c'est le phénomène d'induction magnétique.

Comme  $i = dq/dt$ , la quantité d'électricité induite est alors  $q = -\Delta\Phi / R$  pour une variation de flux  $\Delta\Phi$ .

### Loi de Lenz

Les effets de l'induction s'opposent à la cause qui leur a donné naissance. C'est le signe "-" de la loi de Faraday.

*Exemple d'induction dans une spire de courant en champ magnétique variable*



La spire est dans un champ magnétique variable  $\mathbf{B}(t)$   
On choisit un sens positif arbitraire pour les courants qui oriente le contour  $\mathcal{C}$  et la surface  $\mathbf{S}$  du circuit dans le sens de  $\mathbf{B}$  de sorte que  $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$

$\nearrow \rightarrow d\Phi/dt > 0 \rightarrow e < 0 \rightarrow i < 0 \rightarrow \mathbf{B}_{\text{induit}}$  vers la gauche s'oppose à l'augmentation du flux (loi de Lenz)

$\searrow \rightarrow d\Phi/dt < 0 \rightarrow e > 0 \rightarrow i > 0 \rightarrow \mathbf{B}_{\text{induit}}$  vers la droite s'oppose à la diminution du flux (loi de Lenz)

## VIII - Equation de conservation de l'énergie électromagnétique

Introduisons le vecteur de Poynting  $\mathbf{P} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})/\mu_0$  dont on donnera la signification plus loin.

$$\text{div } \mathbf{P} = \text{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})/\mu_0 = (\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{B})/\mu_0$$

avec  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  (Maxwell Ampère pour un milieu conducteur)

et  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  (Maxwell Faraday),

on obtient:  $\text{div } \mathbf{P} = -\partial/\partial t (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$

soit l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\partial/\partial t (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0) + \text{div } \mathbf{P} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

qui est de la forme d'une équation de conservation généralisée  $\partial \rho_E / \partial t + \text{div } \mathbf{j}_E = s$  où  $\rho_E = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0$  est la densité volumique d'énergie électromagnétique ( $\text{J m}^{-3}$ ) dans laquelle:

$\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  est la densité volumique d'énergie électrique ( $\text{J m}^{-3}$ ) ou pression électrique (Pa)

$\mathbf{B}^2/2\mu_0$  est la densité volumique d'énergie magnétique ( $\text{J m}^{-3}$ ) ou pression magnétique (Pa)

$\mathbf{P} = \mathbf{j}_E$  est la densité de courant d'énergie, ou puissance transportée par unité de surface ( $\text{W m}^{-2}$ ).

$\text{div } \mathbf{P}$  représente alors une densité volumique de puissance transportée en  $\text{W m}^{-3}$ .

Attention ! Ne pas confondre  $\mathbf{P}$  vecteur de Poynting avec polarisation ou pression gazeuse !

$s = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  est un terme source/perte d'énergie en  $\text{W m}^{-3}$ ; c'est la densité de puissance des charges mobiles; ce peut être une perte par effet Joule dans un conducteur si  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ .

→ a - Cas des électrons mobiles

Supposons l'électron, de charge  $-e$  et de masse  $m$ , lié à un atome par une force de rappel de la forme simplifiée  $-m \omega_0^2 \mathbf{r}$ , où  $k = m \omega_0^2$  est une constante de raideur et  $\mathbf{r}$  la position de la particule; le PFD donne en présence du champ électrique  $\mathbf{E}$  et du champ magnétique  $\mathbf{B}$  (en négligeant tout frottement, donc collision):

$$m \, d\mathbf{v}/dt = -e \mathbf{E} - e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - m \omega_0^2 \mathbf{r} \quad \text{où } \mathbf{v} \text{ est la vitesse définie par } \mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$$

En faisant le produit scalaire avec  $\mathbf{v}$ , on obtient:  $d(1/2 m \mathbf{v}^2)/dt = -e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} - d(1/2 m \omega_0^2 \mathbf{r}^2)/dt$

Multiplions par  $N$ , nombre d'électrons par unité de volume: le produit  $m N$  est alors la masse volumique  $\mu$  ( $\text{kg m}^{-3}$ ) et la densité de charge mobiles est  $\rho = -N e$  ( $\text{C m}^{-3}$ ).

$$d(1/2 \mu \mathbf{v}^2)/dt = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} - d(1/2 \mu \omega_0^2 \mathbf{r}^2)/dt$$

Comme  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , on en conclut que la puissance volumique des charges mobiles s'exprime ainsi:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = d(1/2 \mu \mathbf{v}^2 + 1/2 \mu \omega_0^2 \mathbf{r}^2)/dt = d(E_c + E_p)/dt$$

où  $E_c$  et  $E_p$  constituent respectivement la densité volumique d'énergie cinétique et potentielle des charges mobiles ( $\text{J m}^{-3}$ ). L'équation de conservation de l'énergie devient alors:

$$\partial/\partial t (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0 + E_c + E_p) + \text{div } \mathbf{P} = 0$$

ou encore

$$\partial \rho_E / \partial t + \text{div } \mathbf{P} = 0$$

où  $\rho_E = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0 + E_c + E_p$  est la densité volumique d'énergie totale.

L'énergie mécanique des charges mobiles s'ajoute donc à l'énergie électromagnétique des champs.

→ b - Cas d'une OPPH

Si  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont associés à une OPPH, on a en valeur moyenne temporelle  $\langle \partial/\partial t (\rho_E) \rangle = 0$ . On en déduit  $\text{div} \langle \mathbf{P} \rangle = 0$ ; cette égalité signifie (en moyenne) puissance entrante = puissance sortante. Par contre,  $\langle \mathbf{P} \rangle$  et  $\langle \rho_E \rangle$  sont non nuls. Examinons cela en détails.

Pour une OPPH du type  $\mathbf{X} = |\mathbf{X}| e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , on a en valeur moyenne temporelle:

$$\langle \partial/\partial t (X^2) \rangle = \langle 2X \partial X/\partial t \rangle = R_e [ \langle X \partial X/\partial t^* \rangle ] = R_e [ X (i\omega X)^* ] = \omega |X|^2 R_e(i) = 0.$$

Ceci est vrai pour toute quantité quadratique comme l'énergie électromagnétique ( $\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0$ ), l'énergie cinétique ( $1/2 m \mathbf{v}^2$ ) ou potentielle ( $1/2 \mu \omega_0^2 \mathbf{r}^2$ ).

Toujours pour une OPPH avec  $\mathbf{B} = \mathbf{E} (\mathbf{k}/\omega)$ ,  $\langle \mathbf{P} \rangle = 1/2 R_e [\mathbf{E} \mathbf{B}^*/\mu_0] = 1/2 \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 C^2 R_e(\mathbf{k})/\omega$

$v_\phi = \omega/R_e(\mathbf{k})$  et  $v_g = d\omega/dR_e(\mathbf{k})$  sont respectivement les vitesses de phase et de groupe.

De  $\langle P \rangle = 1/2 \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 C^2/v_\phi = \langle \rho_E \rangle v_g$ , on en déduit la densité moyenne d'énergie transportée  $\langle \rho_E \rangle$ :

$$\langle \rho_E \rangle = 1/2 \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 [ C^2 / (v_\phi v_g) ]$$

→ c - Cas d'un milieu diélectrique LHI

Sans charge et sans courant, l'équation de conservation devient:

$$\mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D} / \partial t + \partial (\mathbf{B}^2 / 2 \mu_0) / \partial t + \text{div } \mathbf{P} = 0$$

en raison de l'équation de Maxwell Ampère qui est  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \partial \mathbf{D} / \partial t$

Dans un milieu LHI,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  où  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 n^2$ ;  $n = n_1 - i n_2$  est l'indice de réfraction complexe.

L'équation de d'Alembert  $\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$  a pour solution une OPPH de relation de dispersion:

$$k = (\omega / C) n = (\omega / C) (n_1 - i n_2)$$

Une OPPH de pulsation  $\omega$  se propageant selon Oz est de la forme:  $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{-(\omega n_2 / C)z} e^{i\omega(t - n_1 z / C)}$

Le module E du champ décroît selon Oz (onde évanescence):  $E = E_0 e^{-(\omega n_2 / C)z}$

- onde propagative:  $n_2 = 0$
- onde absorbée:  $n_1 = 0$  (ondes stationnaires amorties)
- onde évanescence:  $n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$ , amplitude décroissante au fur et à mesure de la propagation

Evaluons la puissance moyenne transportée ( $\text{W m}^{-2}$ ):

$$\langle P \rangle = 1/2 \epsilon_0 C^2 |\mathbf{E}|^2 \text{Re}(k) / \omega = 1/2 \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 C n_1 = 1/2 \epsilon_0 E_0^2 e^{-2(\omega n_2 / C)z} C n_1$$

on en déduit:  $\langle \text{div } \mathbf{P} \rangle = \partial \langle P \rangle / \partial z = - \epsilon_0 E_0^2 e^{-2(\omega n_2 / C)z} n_1 n_2 \omega < 0$  ( $\text{W m}^{-3}$ )

De ce fait,  $\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle = \langle \mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D} / \partial t + \partial (\mathbf{B}^2 / 2 \mu_0) / \partial t \rangle = \epsilon_0 E_0^2 e^{-2(\omega n_2 / C)z} n_1 n_2 \omega > 0$

la densité d'énergie volumique  $\rho_E$  croît en moyenne, l'onde dépose localement de l'énergie dès que  $n_1 \neq 0$  et  $n_2 \neq 0$ .

Enfin, avec  $\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}$ ,  $\rho_E = \epsilon_0 (n \mathbf{E})^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2 \mu_0$

$\mathbf{B} = k \mathbf{E} / \omega$ ,  $k = (\omega / C) n \rightarrow \mathbf{B} = (n \mathbf{E}) / C \rightarrow \langle \rho_E \rangle = (\epsilon_0 / 2) |n|^2 |\mathbf{E}|^2$  densité d'énergie.

- Récapitulatif:
- onde propagative:  $n_2 = 0$ ,  $\langle P \rangle = 1/2 \epsilon_0 E_0^2 C n_1$  constant,  $\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle = 0$ , transport sans dépôt
- onde absorbée:  $n_1 = 0$ ,  $\langle P \rangle = 0$ ,  $\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle = 0$ , pas de transport d'énergie
- onde évanescence:  $n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$ ,  $\langle P \rangle = 1/2 \epsilon_0 E_0^2 e^{-2(\omega n_2 / C)z} C n_1$  décroissant,  $\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle > 0$ , transport avec dépôt d'énergie

→ d - Cas d'un conducteur fixe obéissant à la loi d'Ohm

avec  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  (loi d'Ohm), l'équation de Maxwell Ampère devient:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t = \mu_0 \gamma \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$$

De  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  (pas de charges) et  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ,

on obtient  $\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \gamma \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$

Cette équation comporte un terme diffusif  $\mu_0 \gamma \partial \mathbf{E} / \partial t$  et un terme propagatif  $\mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$ .  
Recherchons une solution de type OPPH de pulsation  $\omega$  propagative selon Oz de la forme:  
 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ ; la relation de dispersion s'écrit:

$$k^2 = \omega^2 / C^2 - i \omega \mu_0 \gamma$$

Dans un milieu conducteur (métal, eau de mer), aux radio fréquences (de 3000 Hz à 300 GHz correspondant respectivement aux longueurs d'onde de 100 km à 1 mm), le premier terme est négligeable devant le second, donc:

$$k^2 = -i \omega \mu_0 \gamma = 1/2 (1 - i)^2 \omega \mu_0 \gamma$$

d'où  $k = (1 - i) / \delta = (\omega / C) (n_1 - i n_2)$  où  $\delta$  est l'épaisseur de peau:  $\delta = (2 / \omega \mu_0 \gamma)^{1/2}$

Cette grandeur caractérise l'épaisseur d'absorption de l'onde dans le milieu. A titre d'exemple, l'ordre de grandeur de  $\delta$  est le cm à 50 Hz pour un métal ( $\gamma$  voisin de  $10^7 \text{ Sm}^{-1}$ ). Pour l'eau de mer ( $\gamma$  proche de  $5 \text{ Sm}^{-1}$ ),  $\delta$  est de l'ordre de quelques mètres pour les basses fréquences radio (10 Kz); les communications avec les sous marins ne peuvent donc se faire qu'aux basses fréquences, celles usuellement utilisées étant dissipées dans l'eau par effet Joule, comme on va le voir ci dessous.

On a donc pour les indices de dispersion et d'absorption:  $n_1 = n_2 = C / \delta \omega$

L'onde est évanesccente:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$

$$\text{On a } \langle \mathbf{P} \rangle = 1/2 \text{Re} [\mathbf{E} \mathbf{B}^* / \mu_0] = 1/2 |\mathbf{E}|^2 \text{Re}(k) / \omega \mu_0 = 1/2 E_0^2 e^{-2z/\delta} / (\omega \delta \mu_0)$$

$$\text{d'où } \langle \text{div } \mathbf{P} \rangle = \partial \langle \mathbf{P} \rangle / \partial z = -E_0^2 e^{-2z/\delta} / (\omega \delta^2 \mu_0)$$

$$\text{à comparer avec la puissance Joule moyenne } \mathcal{P}_J = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle \gamma \mathbf{E}^2 \rangle = 1/2 \gamma |\mathbf{E}|^2$$

$$\text{soit } \mathcal{P}_J = 1/2 \gamma E_0^2 e^{-2z/\delta} = E_0^2 e^{-2z/\delta} / (\omega \delta^2 \mu_0) \text{ puisque } \delta = (2 / \omega \mu_0 \gamma)^{1/2}$$

Ainsi,  $\langle \text{div } \mathbf{P} \rangle + \mathcal{P}_J = 0$  l'énergie déposée par l'onde est dissipée localement par effet Joule.

Le champ magnétique associé à l'OPPH est  $\mathbf{B} = \mathbf{E} (k/\omega) = \mathbf{E} (1 - i) / \delta \omega = (\sqrt{2}/\delta \omega) e^{-i\pi/4} \mathbf{E}$

$$\mathbf{B} = (\sqrt{2}/\delta \omega) E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta - \pi/4)}$$

*Loi de conservation globale pour un conducteur fixe, avec  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  (loi d'Ohm)*

Dans ce cas,  $|s| = \gamma \mathbf{E}^2 = \mathbf{j}^2 / \gamma = \text{densité de puissance JOULE (W m}^{-3}\text{)}$

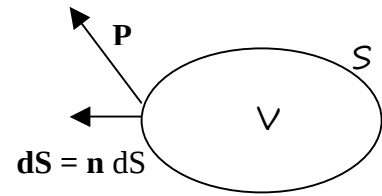
L'équation globale de conservation de l'énergie électromagnétique s'obtient par intégration de l'équation locale  $\partial/\partial t (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0) + \text{div } \mathbf{P} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  sur un volume  $V$  entouré par la surface fermée  $S$ , au moyen du théorème d'Ostrogradski:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \iiint (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0) dv \right] + \iint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint (\mathbf{j}^2/\gamma) dv$$

Puissance  
électromagnétique  
(W) du volume V

Perte/gain aux  
frontières sur S  
(W)

Perte par effet  
Joule (W)  
du volume V



$\mathbf{n}$  normale à la surface élémentaire  $d\mathbf{S}$

où  $\iint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$  est le flux de puissance électromagnétique au travers de la surface fermée S frontière (perte ou gain aux frontières selon que  $\mathbf{P}$  est orienté vers l'extérieur ou l'intérieur). Il peut être nul.

Cette équation globale possède plusieurs significations:

- l'énergie électromagnétique  $\iiint (\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0) dv$  se conserve en l'absence de dissipation Joule si les entrées sont compensées par les sorties aux frontières (ou si elles y sont nulles).
- en régime permanent,  $\iint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint (\mathbf{j}^2/\gamma) dv$  signifie que la puissance électromagnétique entrante est égale à la puissance sortante plus celle dissipée par effet Joule.

### Exemple de bilan du circuit filiforme fermé en ARQS

Dans le cas d'un circuit filiforme fermé sur lui même, de résistance R, on a vu que l'équation électrique s'écrit  $R i - e = 0$  soit:

$$R i + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{où } \Phi \text{ est le flux magnétique total au travers du circuit;}$$

en multipliant par i, on obtient le bilan de puissance:  $R i^2 + i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

Si ce circuit possède une inductance propre L (unité: Henry, H) et baigne dans un champ magnétique extérieur variable  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ , alors:

$$\Phi = L i + \Phi_{\text{ext}}$$

où L i est le flux propre (flux du champ magnétique généré par le circuit au travers de lui même) et

$$\Phi_{\text{ext}} = \iint \mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{est le flux du champ } \underline{\text{extérieur}} \text{ au travers du circuit.}$$

En présence d'un second circuit d'intensité I, il faudrait y ajouter le flux mutuel M I, où M serait le coefficient d'inductance mutuelle (unité: Henry, H) entre les deux circuits.

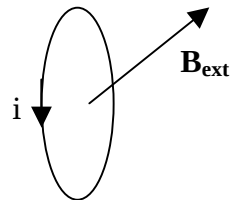
L'intensité i est donnée par la résolution de l'équation électrique et le bilan de puissance devient:

$$R i + L \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial t} = 0$$

$$R i^2 + \frac{\partial (\frac{1}{2} L i^2)}{\partial t} + i \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial t} = 0$$

relation dans laquelle:

$R i^2$  est la puissance Joule (W)  
 $\frac{1}{2} L i^2$  est l'énergie magnétique du circuit (J)  
 $i \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial t}$  la puissance échangée avec l'extérieur (W)



## IX - Force de Laplace subie par un courant

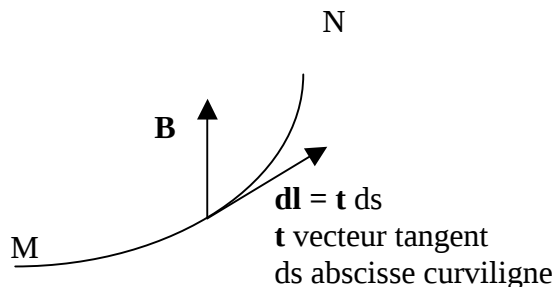
Lorsqu'un courant électrique de densité volumique  $\mathbf{j}$  ( $\text{A m}^{-2}$ ) est plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , il subit une force magnétique, dite force de Laplace, dont l'expression vectorielle est:

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{en N m}^{-3})$$

Cette force est volumique;  
sur un volume  $\mathcal{V}$  la force totale est

$$\mathbf{F} = \iiint \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \, dv \quad (\text{en N})$$

*Cas du circuit filiforme*



Si le courant est filiforme d'intensité  $i$ , la force de Laplace élémentaire devient:

$$d\mathbf{F} = i \, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{en N}), \quad d\mathbf{l} \text{ étant un élément de courant.}$$

Sur le circuit MN,  $\mathbf{F} = \int i \, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$  (intégrale curviligne de M à N).

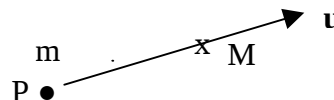
La force de Laplace est orthogonale au plan formé par les vecteurs  $d\mathbf{l}$  (élément de courant) et  $\mathbf{B}$  (champ magnétique).

Un courant colinéaire au champ magnétique ne subit pas de force de Laplace.

## X - Analogie électrostatique/gravitation: équations du champ de gravitation

Le champ de gravitation créé par une masse  $m$  obéit à la loi de Newton:

$$\mathbf{G}(M) = -K m \mathbf{u} / r^2 \quad (\text{m s}^{-2})$$



où  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire allant de la masse  $m$  au point  $P$  vers le point  $M$  où l'on considère ses effets gravitationnels ( $\mathbf{u} = \mathbf{PM} / \|\mathbf{PM}\|$ ).

$K$  est la constante d'attraction universelle ( $6.67 \cdot 10^{-11}$  unités SI).  $r = PM$  (en mètres) est la distance qui sépare le point  $M$  de la masse  $m$  (en kg).

Cette loi est analogue à la loi de Coulomb  $\mathbf{E}(M) = (1/4\pi\epsilon_0) q \mathbf{u} / r^2 \quad (\text{V m}^{-1})$

Cependant, les forces de gravitation sont purement attractives, contrairement aux forces électrostatiques qui sont attractives ou répulsives selon le signe des charges en interaction.

En remplaçant  $-K$  par  $1/4\pi\epsilon_0$  et  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{G}$  dans les deux équations de Maxwell du champ électrique, on obtient les équations du champ de gravitation:

|                                         |                                    |
|-----------------------------------------|------------------------------------|
| $\text{div } \mathbf{G} = -4\pi K \rho$ | <i>Equation de Maxwell Gauss</i>   |
| $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{0}$   | <i>Equation de Maxwell Faraday</i> |

où  $\rho$  est désormais la masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ ).

Le champ de gravitation  $\mathbf{G}$  est à circulation conservative, il dérive d'un potentiel de gravitation  $V$  par la relation:

$$\mathbf{G} = - \text{grad } V \quad (V \text{ en } \text{m}^2 \text{s}^{-2})$$

Le potentiel  $V$  est solution de l'équation de Poisson:

$$\Delta V = 4\pi K \rho$$

Dont la solution est

$$V(\mathbf{M}) = - K \iiint [\rho/r] dv$$

l'intégrale portant sur le volume contenant les masses et  $r$  étant la distance de la masse élémentaire  $dm = \rho dv$  au point  $M$  où l'on considère la gravitation. On en tire pour le champ gravitationnel:

$$\mathbf{G}(\mathbf{M}) = - K \iiint [\rho \mathbf{u}/r^2] dv \quad (\text{unité: } \text{m s}^{-2})$$

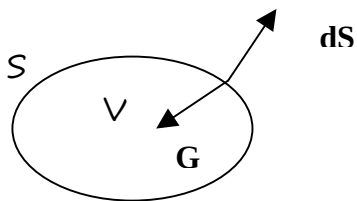
$\mathbf{u}$  étant le vecteur unitaire orienté de la masse élémentaire  $dm = \rho dv$  vers le point  $M$  où l'on recherche le champ de gravitation.

### *Théorème de Gauss du champ de gravitation*

Le flux du champ de gravitation à travers une surface fermée  $S$  est égal à la somme des masses (en kg) intérieures au volume  $V$  entouré par cette surface multipliée par  $-4\pi K$

$$\iint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi K (\Sigma \text{ masses intérieures})$$

Les symétries du champ de gravitation sont identiques à celles du champ électrostatique: le champ appartient au plan de symétrie des masses.



Masse intérieure:

$$M = \iiint \rho dv \text{ sur le volume } V$$

*Conséquence:* champ de gravitation à la surface d'un corps sphérique de masse  $M$  et de rayon  $R$

$\mathbf{G}$  est à symétrie sphérique sur la sphère de rayon  $R$ , donc:

$$\iint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi R^2 G$$

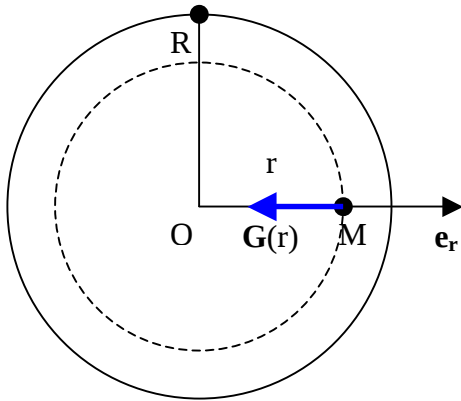
D'après le théorème de Gauss,

$$\iint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi K M, \text{ d'où } \mathbf{G} = -K M / R^2 \mathbf{u}$$

appelé aussi champ de pesanteur. Tout se passe comme si la masse  $M$  était ponctuelle et ramenée au centre de la sphère de rayon  $R$ . On note en général ce champ de pesanteur  $g = K M / R^2$ . Il vaut  $9.81 \text{ m s}^{-2}$  à la surface de la Terre et  $275 \text{ m s}^{-2}$  à la surface du Soleil.

### Application 1: un modèle simple d'intérieur solaire

On suppose que le Soleil est une sphère gazeuse incompressible, de masse volumique  $\rho$  uniforme, et de rayon  $R$ . Quel est le champ de gravitation et la pression interne en fonction de la distance au centre  $r = OM$  (on prendra la pression nulle en surface) ? En déduire la pression au centre du Soleil.



- (1) invariances: le problème est à symétrie sphérique et ne dépend que de la variable  $r$  seule  $\rightarrow \mathbf{G} = G(r) \mathbf{e}_r$
- (2) Tout plan contenant OM est plan de symétrie des masses  $\rightarrow \mathbf{G} = G(r) \mathbf{e}_r$
- (3) on choisit une sphère de Gauss de rayon  $r < R$
- (4) flux sur la sphère de rayon  $r$  :  $4 \pi r^2 G$
- (5) masse intérieure:  $M_{\text{int}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$

Théorème de Gauss:  $4 \pi r^2 G = -4 \pi K M_{\text{int}}$

d'où l'on tire:  $G(r) = -K \frac{4}{3} \pi r \rho$  pour  $r < R$

$G(0) = 0$  et en surface  $G(R) = -K \frac{4}{3} \pi R \rho = -K M / R^2$  où  $M$  est la masse du Soleil

Si l'étoile est en équilibre hydrostatique, on a  $dP/dr = -\rho |G(r)|$  dr

donc  $dP/dr = -K \frac{4}{3} \pi r \rho^2$

Cette équation qui s'intègre immédiatement et donne:  $P(r) = -K \frac{2}{3} \pi r^2 \rho^2 + \text{constante}$

et on choisit la constante de sorte que  $P(R) = 0$ ; d'où  $P(r) = K \frac{2}{3} \pi \rho^2 (R^2 - r^2)$

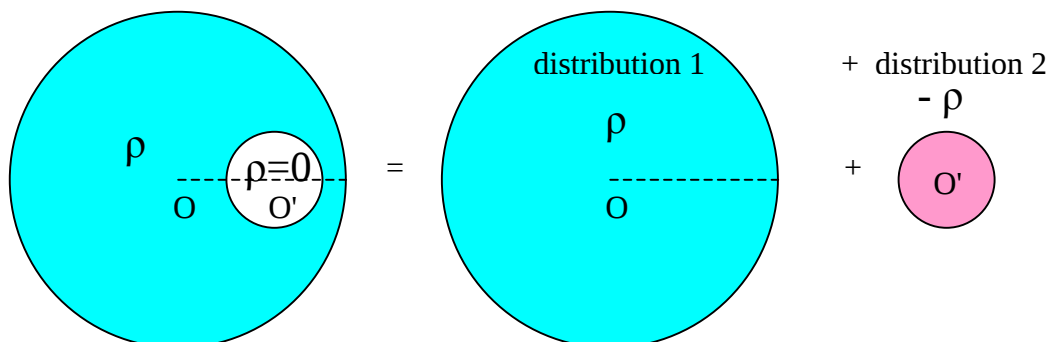
On en déduit la pression centrale  $P(0) = K \frac{2}{3} \pi \rho^2 R^2$

$M = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $R = 7 \cdot 10^8$  m  $\rightarrow \rho = 1400$  kg m<sup>-3</sup>  $\rightarrow P(0) = 1.3 \cdot 10^{14}$  Pa (un facteur 100 en dessous des modèles raffinés qui prévoient  $1.8 \cdot 10^{16}$  Pa).

### Application 2: champ de gravitation dans une grotte

Considérons un corps sphérique de centre O et de masse volumique uniforme  $\rho$ .

On insère à l'intérieur une cavité sphérique de centre O'. Quel est le champ de gravitation dans la cavité ?



### Théorème de superposition:

les équations de Maxwell étant linéaires, si  $\mathbf{G}_1$  est le champ d'une distribution  $\rho_1$  et  $\mathbf{G}_2$  le champ d'une distribution  $\rho_2$ , alors  $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$  est le champ de la distribution  $\rho_1 + \rho_2$ .

En reprenant le résultat de l'exemple précédent:

- la distribution 1 génère au point M un champ  $\mathbf{G}_1 = -K \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{OM}$

- la distribution 2 génère au point M un champ  $\mathbf{G}_2 = -K \frac{4}{3} \pi (-\rho) \mathbf{O'M}$ ,

→  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = -K \frac{4}{3} \pi \rho (\mathbf{OM} - \mathbf{O'M}) = -K \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{OO'}$  est un champ uniforme.

## Annexe 1: Parallèle électrostatique/magnétostatique

Charge  $dq = \rho dv$

Force  $d\mathbf{F} = dq \mathbf{E}$

charges source de  $\mathbf{E}$ :

$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \rightarrow \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{intérieur}}/\epsilon_0$

$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{E} = -\text{grad } V$

Champ d'une distribution de charges:

équation de Poisson  $\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0$

$dV = (1/4\pi\epsilon_0) \rho dv / r$

$d\mathbf{E} = (1/4\pi\epsilon_0) \rho dv \mathbf{u} / r^2$

Densité d'énergie  $\epsilon_0 E^2/2$

Dipôle (moment dipolaire  $\mathbf{p} = q \mathbf{A} \mathbf{A}_+$ ):

$V = (1/4\pi\epsilon_0) \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} / r^2$

$\mathbf{E} = - (1/4\pi\epsilon_0) \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} / r^2)$

énergie potentielle:  $E_p = - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{extérieur}}$

couple subi:  $\Gamma = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{extérieur}}$

force subie:  $\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{extérieur}})$

Courant  $di = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ ,  $i = dq/dt$

Force  $d\mathbf{F} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} dv$

$= i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$  (courant filiforme)

courants source de  $\mathbf{B}$ :

$\text{div } \mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$

$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \rightarrow \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

Champ d'une distribution de courants:

équation de Poisson  $\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} = \mathbf{0}$

$d\mathbf{A} = (\mu_0/4\pi) \mathbf{j} dv / r$

$= (\mu_0/4\pi) i d\mathbf{l} / r$  (courant filiforme)

$d\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi) \mathbf{j} dv \wedge \mathbf{u} / r^2$

$= (\mu_0/4\pi) i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u} / r^2$  (courant filiforme)

Densité d'énergie  $B^2/2\mu_0$

Dipôle (moment magnétique  $\mathbf{M} = i \mathbf{S}$ ):

$\mathbf{A} = (\mu_0/4\pi) \mathbf{M} \wedge \mathbf{u} / r^2$

$\mathbf{B} = - (\mu_0/4\pi) \text{grad}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} / r^2)$

énergie potentielle:  $E_p = - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{extérieur}}$

couple:  $\Gamma = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B}_{\text{extérieur}}$

force subie:  $\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{extérieur}})$

## Annexe 2

### Quelques constantes universelles

$C = 3 \cdot 10^8$  m/s vitesse de la lumière dans le vide  
 $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C charge élémentaire  
 $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$  kg masse de l'électron  
 $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg masse du proton  
 $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$  MKSA constante de Planck  
 $k = 1.38 \cdot 10^{-23} = R/N$  constante de Boltzmann  
 $R = 8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$  constante des gaz parfaits  
 $N = 6.02 \cdot 10^{23}$  constante d'Avogadro  
 $R_H = 13.6 \text{ eV}$  constante de Rydberg  
 $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  MKSA perméabilité magnétique du vide  
 $K = 6.67 \cdot 10^{-11}$  MKSA constante gravitationnelle  
 $1/(4 \pi \epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$  MKSA,  $\epsilon_0$  permittivité du vide

### Conductivités usuelles en $\text{S m}^{-1}$

|                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| Métaux:           | $5 \cdot 10^7$    |
| Couronne solaire: | $10^6$            |
| Carbone:          | $2.5 \cdot 10^4$  |
| Surface solaire:  | $10^3$            |
| Eau de mer:       | 5                 |
| Eau douce, sol:   | 0.03              |
| Eau pure:         | $5 \cdot 10^{-6}$ |
| Verre:            | $10^{-17}$        |
| Polystyrène:      | $10^{-20}$        |

### Permittivité relative $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$

air : 1  
 verre : 2.5  
 eau : 80 à 1 GHz mais 1.77 en visible !  
 ( $\epsilon_r$  varie avec la fréquence pour les molécules polaires comme l'eau)

### Spectre électromagnétique (fréquence ou longueur d'onde)

|                                         |                                                        |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| bande VLF: 3 - 30 KHz, 10 - 100 km      | <i>communications sous l'eau</i>                       |
| bande LF: 30 - 300 KHz, 1 - 10 km       | <i>radio grandes ondes</i>                             |
| bande MF: 300 KHz - 3 MHz, 100 m - 1 km | <i>radio ondes moyennes</i>                            |
| bande HF: 3 MHz - 30 MHz, 10 - 100 m    | <i>radio ondes courtes</i>                             |
| bande VHF: 30 MHz - 300 MHz, 1 - 10 m   | <i>radio FM, sécurité publique, radio amateur</i>      |
| bande UHF: 300 MHz - 3 GHz, 10 cm - 1 m | <i>Wifi, téléphone mobile, télévision, micro ondes</i> |
| infra rouge: 1 - 100 $\mu$              |                                                        |
| visible: 0.4 - 0.8 $\mu$                |                                                        |
| ultra violet: 10 - 300 nm               |                                                        |
| X : 0.1 - 10 nm                         |                                                        |
| Gamma < 0.01 nm                         |                                                        |

