

**Initiation aux diagnostics spectroscopiques et polarimétriques en astrophysique
et physique solaire, effets Doppler et Zeeman
niveau L3**



Jean-Marie.Malherbe@obspm.fr
Observatoire de Paris-Meudon
16 Novembre 2014

Chapitre 1: rayonnement continu, fonction de Planck

<i>Cours</i>	2
<i>TP et expériences possibles</i>	3

**Chapitre 2: Equilibre thermodynamique et formation des raies spectrales,
élargissement Doppler, décalage Doppler**

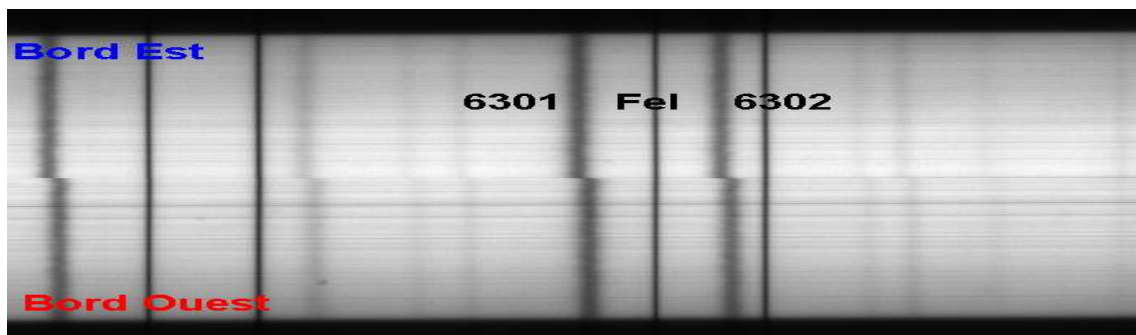
<i>Cours</i>	7
<i>TP et expériences possibles</i>	16

Chapitre 3: Introduction au transfert de rayonnement dans une atmosphère

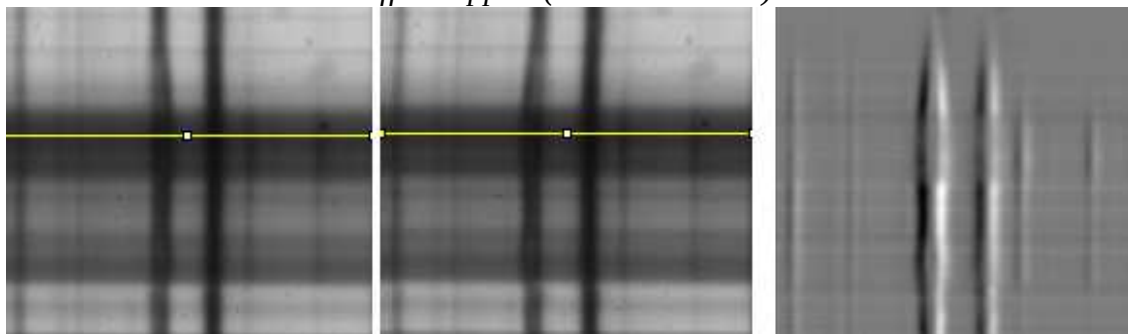
<i>Cours</i>	19
<i>TP et expériences possibles</i>	28

Chapitre 4: L'effet Zeeman et la mesure des champs magnétiques à distance

<i>Cours</i>	29
<i>TP et expériences possibles</i>	38



Effet Doppler (rotation solaire)



Raies en polarisation circulaire droite et gauche et signal Zeeman

Chapitre 1

Rayonnement continu et fonction de Planck

1 - Fonction de Planck du corps noir : densité de rayonnement et intensité

Paradoxalement, le spectre continu (donc en négligeant les raies spectrales) du soleil et des étoiles est proche d'un spectre de corps noir (objet idéal de température T uniforme et constante en équilibre thermodynamique complet sans échange avec l'extérieur). Le spectre de corps noir fournit une bonne approximation de la température de surface (dite effective) des étoiles. La densité spectrale volumique d'énergie du corps noir est :

$$E_v = (8 \pi h v^3 / C^3) / [\exp(h v / k T) - 1] \quad \text{en } J \, m^{-3} \, Hz^{-1}$$

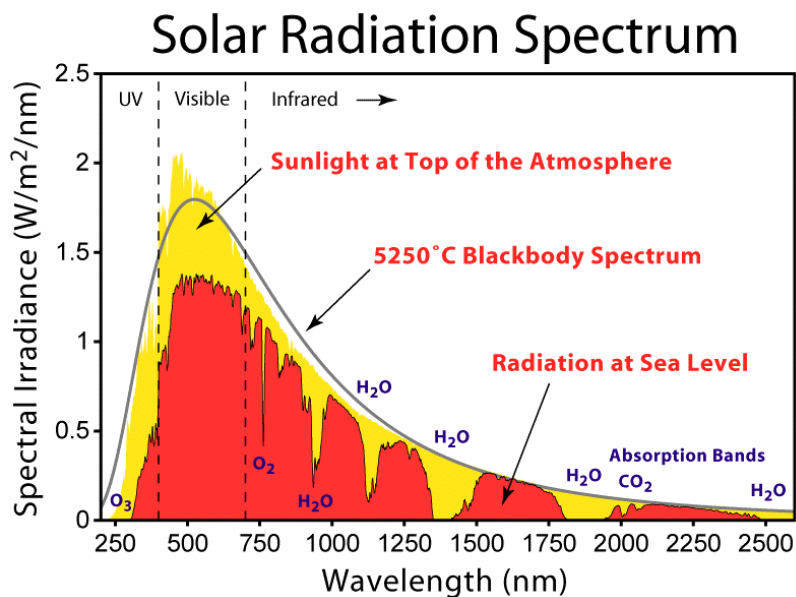
L'intensité spectrale du corps noir est :

$$B_v = E_v (C / 4\pi) = (2 h v^3 / C^2) / [\exp(h v / k T) - 1] \quad \text{en } W \, st^{-1} \, m^{-2} \, Hz^{-1} \quad (st = \text{stéradian})$$

De la relation $B_v dv = B_\lambda d\lambda$ avec $\lambda = C/v$, il vient $B_\lambda = B_v C/\lambda^2$ d'où :

$$B_\lambda = (2 h C^2 / \lambda^5) / [\exp(h C / \lambda k T) - 1]$$

L'intensité spectrale du corps noir pour $T = 5750 \, K$ est représentée ci dessous avec en superposition l'intensité spectrale de rayonnement du soleil en fonction de la longueur d'onde.



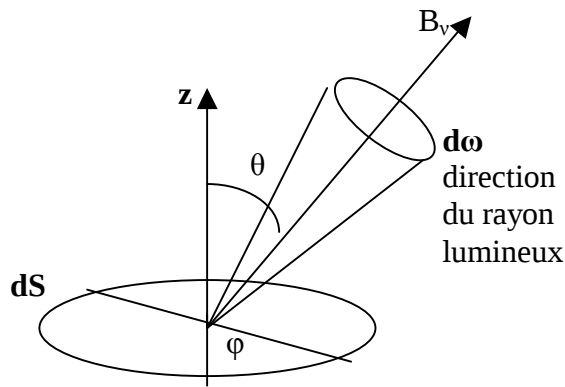
La densité spectrale d'énergie intégrée sur les fréquences donne :

$$E = \int_0^\infty E_v dv = a T^4 \quad \text{en } J \, m^{-3} \quad \text{avec } a = 8 \pi^5 k^4 / (15 C^3 h^3) = 7.56 \, 10^{-16} \, MKSA$$

L'intensité spectrale du corps noir intégrée sur les fréquences vaut :

$$B = \int_0^\infty B_v dv = \sigma T^4 / \pi \quad \text{en } W \, st^{-1} \, m^{-2}$$

avec $\sigma = a C / 4 = 2 \pi^5 k^4 / (15 C^2 h^3) = 5.67 \, 10^{-8} \, W \, m^{-2} \, K^{-4}$ **constante de Stefan**



Le flux d'énergie radiative traversant une surface dS sous l'angle θ est $F = \int B \cos\theta \, d\omega$ avec $d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ angle solide élémentaire tel que $0 < \theta < \pi/2$ et $0 < \phi < 2\pi$.

$$F = \int B \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi = B \int d\phi \int \cos\theta \sin\theta \, d\theta = B 2\pi (1/2) = B \pi = \sigma T^4$$

La puissance en Watts rayonnée par 1 m² de corps noir est donc égale à $F = \sigma T^4$

On définit la température effective du soleil en exprimant l'égalité entre la puissance rayonnée L du soleil et celle du corps noir : $L = 3.86 \cdot 10^{26} \text{ W} = 4 \pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$
avec R rayon du soleil ; on en déduit pour le soleil $T_{\text{eff}} = 5750 \text{ K}$ environ

Loi de Wien

Le maximum λ_{max} de la fonction B_λ est obtenu en résolvant l'équation $dB_\lambda/d\lambda = 0$, équation qui n'a pas de solution analytique et donne numériquement:

$$h C / \lambda_{\text{max}} k T = 4.965 \quad (\text{ce nombre est solution de } e^x = (1 - x/5)^{-1})$$

ce qui donne $\lambda_{\text{max}} T = 2.9 \cdot 10^{-3}$ **ou loi de Wien**

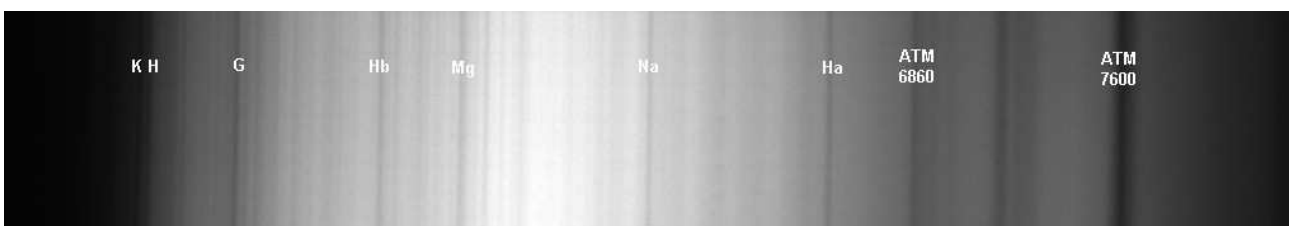
Le maximum de la fonction de Planck se décale vers le bleu lorsque T augmente. Pour le soleil, il se trouve à $\lambda_{\text{max}} = 5000 \text{ \AA}$ dans le vert.

Médiane $\lambda_{1/2}$ de la fonction B_λ : elle est telle que $\int_0^{\lambda_{1/2}} B_\lambda \, d\lambda = \int_{\lambda_{1/2}}^\infty B_\lambda \, d\lambda$

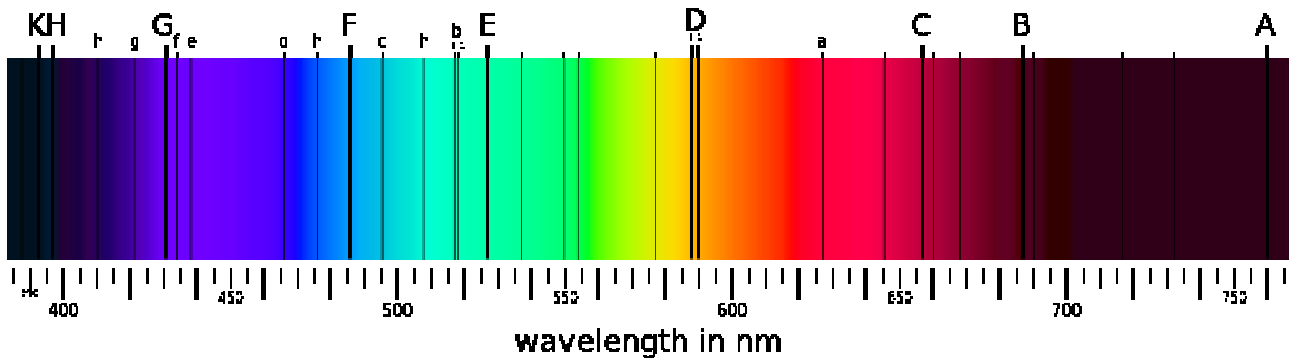
On trouve numériquement $\lambda_{1/2} = 1.42 \lambda_{\text{max}} = 7100 \text{ \AA}$ pour le soleil, ce qui veut dire que presque la moitié de l'énergie est rayonnée dans l'infra rouge.

2 - TP n°1: spectre solaire et température de corps noir du soleil

Il est possible à partir de la loi de Wien de déterminer une température de corps noir du soleil en identifiant la longueur d'onde λ_{max} du maximum d'émission en fonction de la longueur d'onde. Pour ce faire, enregistrer le spectre solaire en utilisant le matériel L3 (spectro ALPY + caméras CCD). On effectuera une coupe que l'on tracera en identifiant les raies larges.



spectre solaire obtenu à l'aide du spectro ALPY (les raies larges sont identifiées)

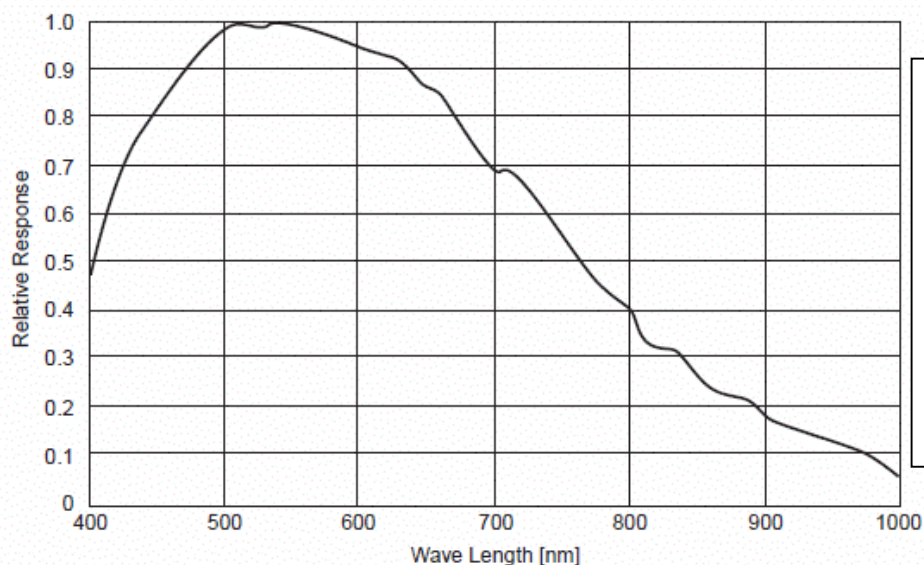


Les principales raies (les plus larges, dites de Fraunhofer, leur découvreur) sont visibles:

K	Ca ⁺ 393.4 nm
H	Ca ⁺ 396.8 nm
G	molécule CH 430 nm
F	H β série de Balmer de l'Hydrogène 486.0 nm
b	Triplet du Magnésium 516.7, 517.3, 518.3 nm
D	Doublet du Sodium 589.0, 589.6 nm
C	H α série de Balmer de l'Hydrogène 656.3 nm
G'	H γ série de Balmer de l'Hydrogène 434.0 nm
h	H δ série de Balmer de l'Hydrogène 410.2 nm
A	ATM O ₂ atmosphère de la Terre dans l'infra rouge (759.4 nm)
B	ATM O ₂ atmosphère de la Terre dans le rouge (686.7 nm)
E	Fer 527.0 nm

Le spectro ALPY est composé d'un GRISM (réseau en transmission + prisme). Sa résolution est voisine de 1 nm (R=600). Pour ne pas perdre d'informations, il faut échantillonner le spectre à une fraction de sa résolution théorique, soit moins de 0.5 nm. **La dispersion est-elle constante ?**

En théorie, il faut corriger le spectre obtenu par la réponse spectrale du capteur (ci dessous) ainsi que par la transmission atmosphérique moyenne qui chute dans le bleu. En réalité, la transmission atmosphérique dépend des conditions d'observation et varie avec la hauteur du soleil. La réponse du spectro n'est pas non plus uniforme le long du spectre de 400 à 800 nm, nous ne la connaissons pas. Ces incertitudes expliquent la difficulté de cette expérience, pourtant simple en apparence... et la raison pour laquelle la variabilité du spectre solaire est étudiée de nos jours hors atmosphère.



Réponse spectrale du capteur CCD SONY ICX285 (caméra ATIK), maximale entre 510 et 540 nm de longueur d'onde (pixels de 6.45 microns, 20000 électrons de capacité maximale par pixel)

Spectral Response Curve

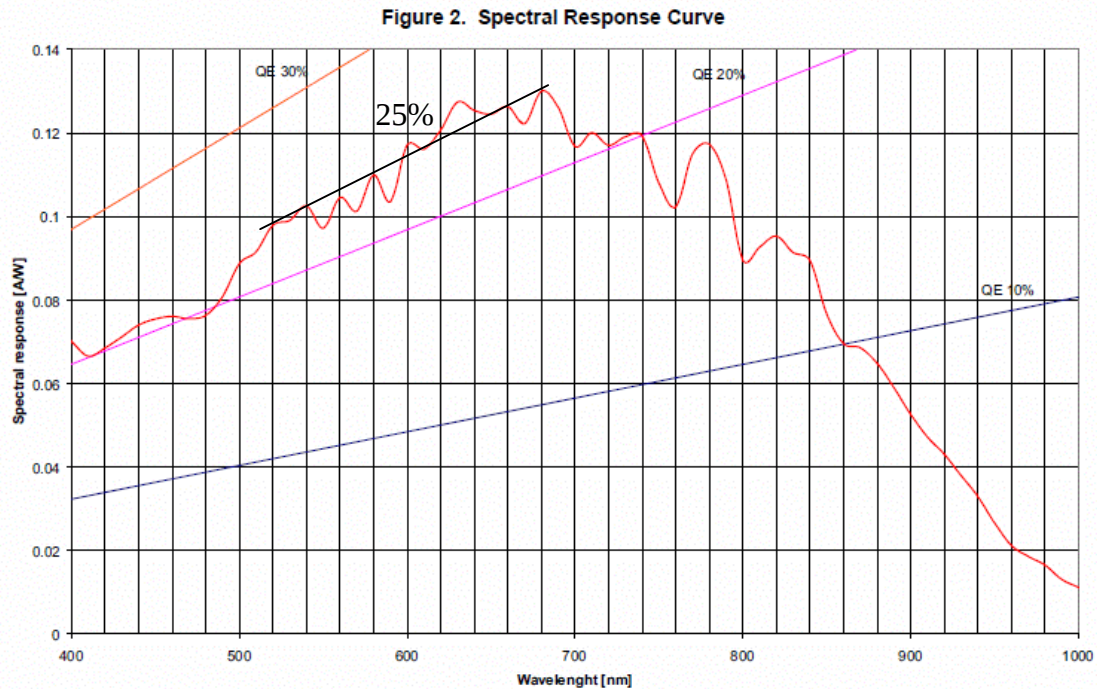
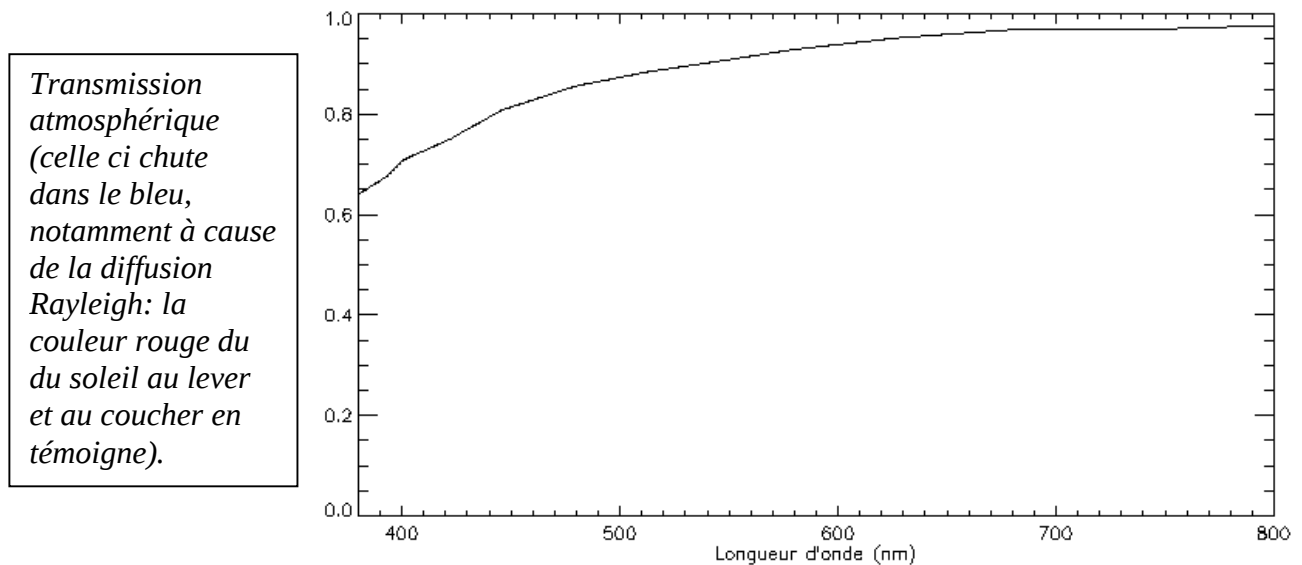


Figure 2 shows the characteristics of the spectral response. The curve is measured directly on the pixels. It includes the effects of nonsensitive areas in the pixel, for example, interconnection lines. The sensor is light sensitive between 400 and 1000 nm. The peak $QE \cdot FF$ is 25% approximately 650 nm. In view of a fill factor of 35%, the QE is close to 70% between 500 and 700 nm.

Réponse spectrale du capteur CMOS IBIS6600 (caméra PIXELINK), maximale de 520 à 680 nm de longueur d'onde (pixels de 3.5 microns, 20000 électrons de capacité maximale par pixel)



3 - TP n°2: différence de température des taches et des facules par rapport au soleil "calme"

La température effective du soleil est de $T_1 = 5750$ K, ou température du soleil "calme".

On peut supposer, en première approximation, que les taches (régions magnétisées plus froides) et les facules (régions également magnétisées plus chaudes) rayonnent selon des corps noirs à des températures différentes de celle du soleil "calme".

Sur une bande spectrale étroite centrée sur la longueur d'onde λ , le rapport R des intensités émises par deux corps noirs aux températures T_1 et T_2 est donné par:

$$R = \left[\exp \left(\frac{h C}{\lambda k T_2} \right) - 1 \right] / \left[\exp \left(\frac{h C}{\lambda k T_1} \right) - 1 \right]$$

En mesurant R , il est ainsi possible d'en déduire T_2 connaissant T_1 .

Il est recommandé de ne pas mesurer l'intensité émise par un point unique, mais de faire une moyenne sur une zone d'une dizaine de pixels au moins.

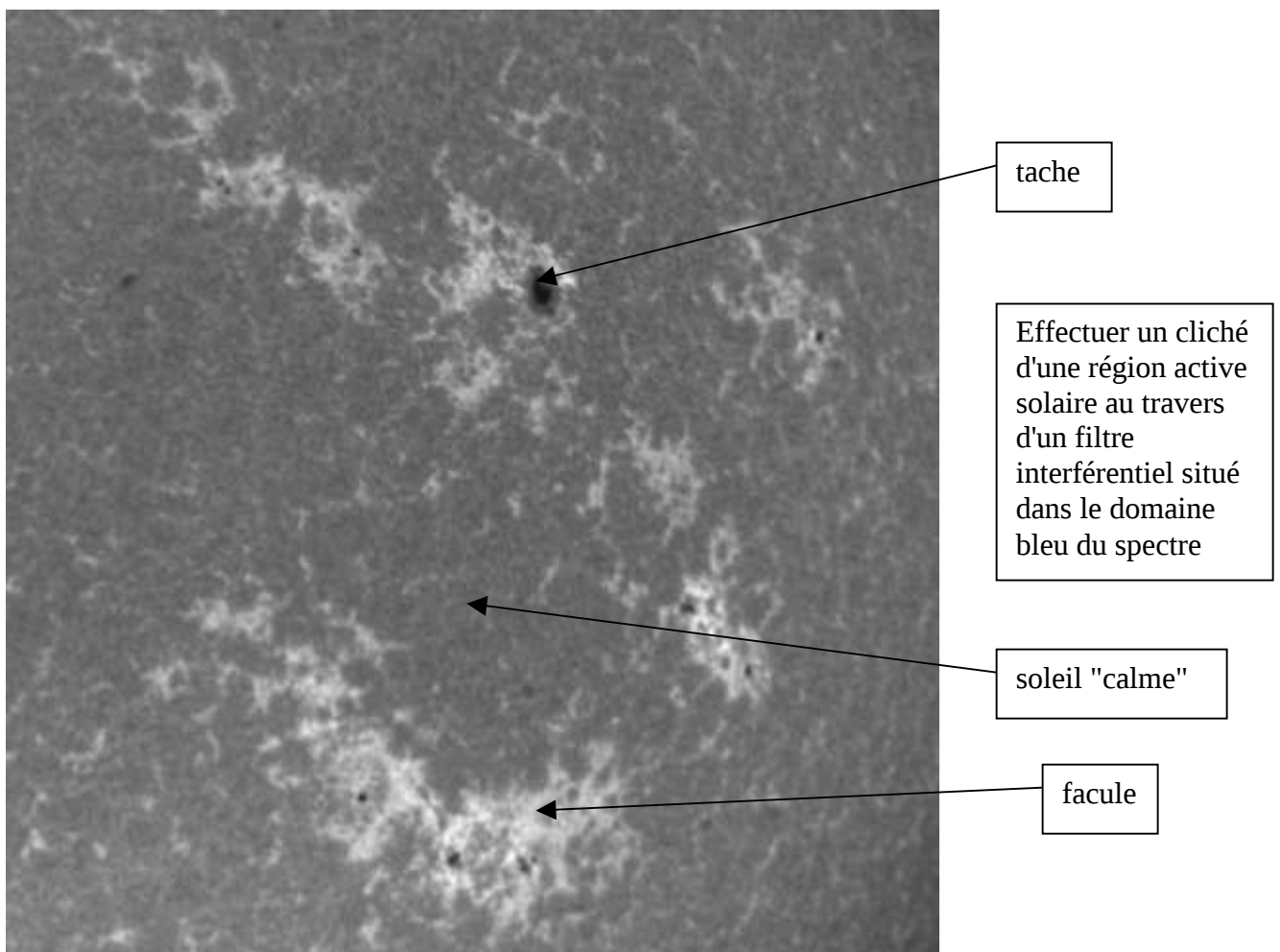
Modèle simplifié de tache

La loi $\rho g z + P + B^2/2\mu_0 = \text{constante}$ orthogonalement à une ligne fluide traduit la conservation de l'énergie (potentielle de pesanteur, interne, magnétique).

P est la pression, B le champ magnétique, z l'altitude, g la gravité, ρ la masse volumique du gaz.

Si $z = \text{constante}$, on obtient en première approximation $B^2/2\mu_0$ (dans la tache) = $P_{\text{extérieure}}$

Avec une pression extérieure de 10000 Pa, on obtient $B = 0.16$ T, valeur réaliste pour les champs magnétiques solaires concentrés.



Chapitre 2

Equilibre thermodynamique et formation des raies spectrales

1 - Le spectre des atomes hydrogénoïdes (transitions quantiques)

Un atome hydrogénoïde est composé d'un noyau de charge électrique $+Ze$ et d'un unique électron de charge $-e$. On peut citer par exemple l'hydrogène neutre HI, dont les raies sont caractéristiques de la chromosphère solaire (à 8000 K), et l'ion HeII, dans la transition chromosphère couronne (à 80000 K). En théorie classique, on considère que l'électron est en rotation autour du noyau à la vitesse angulaire ω et à la distance r du noyau, de telle sorte que : $m_e \omega^2 r = Z e^2 / (4 \pi \epsilon_0 r^2)$

Dans le modèle de Bohr, le moment cinétique orbital L de l'électron est quantifié par la loi:

$$L = n \hbar = m_e \omega r^2$$

Où $\hbar = h / 2\pi$ et où n est un nombre entier positif.

On déduit de ces deux relations $r = n^2 \hbar^2 \epsilon_0 / (m_e \pi Z e^2)$

soit numériquement $r = 0.53 n^2 / Z$ Angströms ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). Le rayon de l'atome d'hydrogène est égal à $\hbar^2 \epsilon_0 / (m_e \pi e^2) = 0.53 \text{ \AA}$ au niveau fondamental ($n = 1, Z = 1$).

L'énergie totale E_n de l'atome est la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m_e \omega^2 r^2$ et de l'énergie potentielle $-Z e^2 / (4 \pi \epsilon_0 r)$. On trouve :

$$E_n = - (Z^2 / n^2) [e^4 m_e / (8 \hbar^2 \epsilon_0^2)] = - R_H Z^2 / n^2 = -13.6 Z^2 / n^2 \text{ électrons Volt}$$

$R_H = e^4 m_e / (8 \hbar^2 \epsilon_0^2)$ est la constante de Rydberg égale numériquement à 13.6 eV.

Les transitions quantiques entre deux niveaux m et n font intervenir l'absorption ou l'émission d'un photon dont l'énergie correspond à la différence d'énergie entre les deux niveaux électroniques :

$$h \nu_{mn} = h C / \lambda_{mn} = - R_H Z^2 (1/n^2 - 1/m^2)$$

ν_{mn} et λ_{mn} sont respectivement la fréquence et la longueur d'onde de la transition quantique.

L'énergie d'ionisation ($m \rightarrow \infty$) à partir du niveau de départ n vaut $E_i = R_H Z^2 / n^2 = 13.6 Z^2 / n^2$ eV ; pour l'atome d'Hydrogène, l'énergie d'ionisation à partir du fondamental ($n = 1, Z = 1$) est égale à la constante de Rydberg $R_H = 13.6$ eV.

Le spectre de l'atome d'Hydrogène ($Z = 1$)

UV : Série de Lyman, transitions du niveau $1 \rightarrow n > 1$: $\Delta E = h \nu = h C / \lambda = R_H (1 - 1/n^2)$

En énergie: $\Delta E = h \nu$: 10.2 eV $\rightarrow$ 13.6 eV (continu, $n \rightarrow \infty$);

en longueur d'onde $\Delta E = h C / \lambda$ d'où λ : 1216 Å (Ly α) $\rightarrow$ 912 Å (continu de Lyman)

Dénomination : Ly α ($1 \rightarrow 2$) ; Ly β ($1 \rightarrow 3$) ; Ly γ ($1 \rightarrow 4$) ...

Energie d'ionisation 13.6 eV ou 912 Å (continu de Lyman: $\lambda < 912 \text{ \AA}$, transitions lié-libre)

Visible : série de Balmer, transitions du niveau $2 \rightarrow n > 2$: $\Delta E = h \nu = h C / \lambda = R_H (1/4 - 1/n^2)$

En énergie: $\Delta E = h \nu$: 1.9 eV $\rightarrow$ 3.4 eV (continu, $n \rightarrow \infty$);

en longueur d'onde $\Delta E = h C / \lambda$ d'où λ : 6563 Å (H α) $\rightarrow$ 3650 Å (continu de Balmer)

Dénomination : H α ($2 \rightarrow 3$) ; H β ($2 \rightarrow 4$) ; H γ ($2 \rightarrow 5$) ...

Energie d'ionisation 3.4 eV ou 3650 Å (continu de Balmer: $\lambda < 3650 \text{ \AA}$, transitions lié-libre)

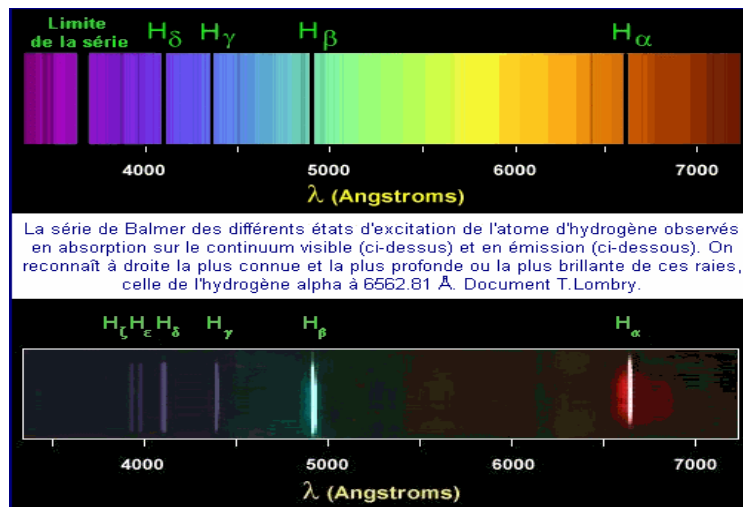
IR, Série de Paschen, transitions du niveau $3 \rightarrow n > 3$: $\Delta E = h \nu = h c / \lambda = R_H (1/9 - 1/n^2)$

En énergie: $\Delta E = h \nu$: 0.7 eV $\rightarrow$ 1.5 eV (continu, $n \rightarrow \infty$);

en longueur d'onde $\Delta E = h c / \lambda$ d'où λ : 18775 Å (Pa α) $\rightarrow$ 8214 Å (continu de Paschen)

Dénomination : Pa α ($3 \rightarrow 4$) ; Pa β ($3 \rightarrow 5$) ; Pa γ ($3 \rightarrow 6$) ...

Energie d'ionisation 1.5 eV ou 8214 Å (continu de Paschen: $\lambda < 8214$ Å, transitions lié-libre)



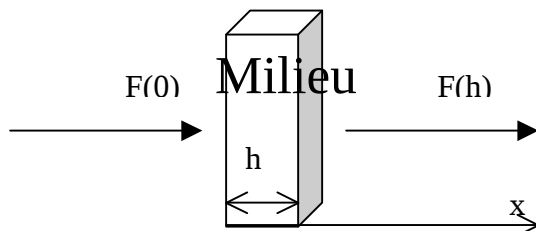
Série de Balmer de l'atome d'Hydrogène.
en haut : raies d'absorption
en bas : raies d'émission.

La limite de la série est à 3650 Å (énergie d'ionisation, continu de Balmer)

2 – Sections efficaces

Les sections efficaces servent à quantifier les interactions matière rayonnement (absorption, émission, diffusion). Elles représentent une surface d'interaction et se mesurent en m^2 .

Considérons un flux F de particules rencontrant un obstacle composé de N cibles par unité de volume, d'épaisseur h , et appelons σ la section efficace d'interaction.



On peut écrire $dF = -F \sigma N dx$ avec σ en m^2 et N en m^{-3}

En intégrant (en supposant σ et N indépendants de x), il vient $F(h) = F(0) \exp(-\sigma N h)$

La quantité $\tau = \sigma N h$ est l'**épaisseur (ou profondeur) optique** du milieu. Lorsqu'on observe le soleil, on voit les régions dont la profondeur optique est voisine de 1 à la longueur d'onde de l'observation.

Plus généralement, on peut écrire $d\tau = \sigma N dx$; dans ce cas $F(h) = F(0) \exp(-\tau)$ avec $\tau = \int_0^h \sigma N dx$

Processus de diffusion des photons:

- la diffusion des photons par les atomes fait passer l'atome d'un niveau d'énergie n vers m , immédiatement suivie de la transition inverse de m vers n , avec ré-émission d'un photon de même énergie mais de direction différente: c'est la diffusion cohérente ou résonante
- La diffusion des photons par les électrons libres : la section de diffusion Thomson des photons par les électrons libres est: $\sigma \approx 6.65 \cdot 10^{-29} m^2$
- La diffusion des photons par les molécules: diffusion Rayleigh, qui varie en $1/\lambda^4$

Les collisions avec les électrons libres:

Sections efficaces de collision avec des électrons libres : $\sigma \approx 10^{-20} \text{ m}^2 \approx \pi a^2$ (a rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène) : la collision provoque un changement d'orbite (hyperbolique) de l'électron dans le champ de l'atome (transition « **libre – libre** ») qui peut passer à un niveau d'excitation supérieur ou inférieur (excitation ou desexcitation collisionnelle). Le rayon de Bohr est $a = (h^2 \epsilon_0) / (\pi m_e e^2) = 0.5 \text{ \AA}$.

L'absorption ou l'émission des photons:

- Sections efficaces de collision avec les photons (photo ionisation) : $\sigma \approx 10^{-21}$ à 10^{-22} m^2 . La photo ionisation correspond à la perte d'un électron par l'atome (transition « **lié – libre** »).
- Sections efficaces de collision avec les photons (photo excitation) : $\sigma \approx 10^{-14}$ à 10^{-16} m^2 . La photo excitation correspond à une transition quantique « **lié – lié** », mais la section efficace est très élevée uniquement dans un intervalle de fréquences très étroit correspondant aux raies spectrales.

3 – Formation des raies spectrales ; profil Lorentzien ; amortissement naturel

Les sections efficaces de photo excitation (transitions quantiques « **lié- lié** ») sont très élevées dans le domaine très étroit de fréquence des raies. Considérons un électron de position x lié au noyau par la force de rappel $-kx$, subissant un amortissement $-m\gamma dx/dt$, et oscillant dans un champ électrique $E e^{i\omega t}$ représentant la vibration lumineuse de pulsation $\omega = 2\pi\nu$. m et $-e$ sont respectivement la masse et la charge de l'électron ; γ est son amortissement (en s^{-1}). Le principe de la dynamique donne :

$$m d^2x/dt^2 + m\gamma dx/dt + kx = -e E e^{i\omega t} \text{ et l'on pose } x = X e^{i\omega t}$$

On peut montrer que le coefficient d'amortissement γ s'obtient en égalisant la puissance moyenne dissipée par la force de frottement $\langle m\gamma(dx/dt)^2 \rangle$ à la puissance moyenne rayonnée par l'électron (établie en L2 par la théorie du rayonnement dipolaire et les potentiels retardés):

$$\gamma = (1/4\pi\epsilon_0) (2/3) e^2 \omega_0^2 / (m C^3) \text{ avec } \omega_0^2 = k/m \text{ pulsation de résonance}$$

Pour la raie $H\alpha$ ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$), on a $\omega_0 = 2\pi C / \lambda = 2.87 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, d'où $\gamma = 5.2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$, cela représente en longueur d'onde une largeur de $\Delta\lambda = \lambda \gamma / \nu_0 = \lambda^2 \gamma / C = 10^{-3} \text{ \AA}$, ce qui est très petit.

$$\text{La résolution de l'équation du mouvement donne : } X = (-e/m) E / (\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega)$$

Comme $\langle (dx/dt)^2 \rangle = 1/2 |X|^2 \omega^2$, la puissance moyenne absorbée par la dissipation est égale à :

$$\langle P_f \rangle = 1/2 m\gamma |X|^2 \omega^2 = 1/2 \gamma (e^2/m) E^2 \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]$$

$$\text{En posant } \omega = 2\pi\nu, \text{ il vient } \langle P_f \rangle = (\gamma/8\pi^2) (e^2/m) E^2 / [(\nu_0^2/\nu - \nu)^2 + (\gamma/2\pi)^2]$$

Au voisinage de la fréquence de résonance ν_0 , on a $(\nu_0^2/\nu - \nu) \approx 2(\nu_0 - \nu)$, d'où

$$\langle P_f \rangle \approx (\gamma/32\pi^2) (e^2/m) E^2 / [(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

La section efficace σ (en m^2) de photo ionisation est définie comme le rapport de la puissance moyenne dissipée $\langle P_f \rangle$ (en W) à la puissance moyenne électromagnétique transportée par unité de surface (moyenne du vecteur de Poynting $\langle P \rangle$ en W/m^2), égale au produit $C \epsilon_0 E^2/2$:

$$\sigma(\nu) = \langle P_f \rangle / \langle P \rangle = \langle P_f \rangle / (C \epsilon_0 E^2/2) = [e^2 / (16\pi^2 \epsilon_0 m C)] \gamma / [(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

Avec $\gamma = 2 \pi e^2 \nu_0^2 / (3 \epsilon_0 m C^3)$, on obtient finalement la section efficace en fonction de ν :

$$\sigma(\nu) = [e^4 / (24\pi \epsilon_0^2 m^2 C^4)] \nu_0^2 / [(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

Introduisons la section efficace de diffusion Thomson de la lumière sur les électrons libres,

$$\sigma_{th} = e^4 / (6\pi \epsilon_0^2 m^2 C^4)$$

alors on obtient $\sigma = \frac{1}{4} \sigma_{th} v_0^2 / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$

A la fréquence centrale de la raie, $v = v_0$ implique $\sigma(v_0) = \sigma_{th} 4 \pi^2 v_0^2 / \gamma^2 = \sigma_{th} 4 \pi^2 C^2 / (\gamma^2 \lambda_0^2)$

Sachant que $\sigma_{th} = 6.63 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$, on en déduit, pour la raie H α ($\lambda_0 = 6563 \text{ \AA}$, $\gamma = 5.2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$) que $\sigma(\text{H}\alpha) \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$. La section efficace au cœur des raies est très grande.

La section efficace totale sur l'ensemble du profil s'obtient par intégration sur les fréquences.

$$\sigma_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(v) dv = e^2 / (4 \epsilon_0 m C)$$

En mécanique quantique, on introduit un facteur multiplicatif appelé *force d'oscillateur* f_{nm} de la transition de telle sorte que $\sigma_{tot} = f_{nm} [e^2 / (4 \epsilon_0 m C)]$. La force d'oscillateur est un nombre inférieur à l'unité (0.641 pour H α , 0.119 pour H β par exemple).

Formation du spectre d'absorption sur le disque

L'équation de transfert du rayonnement s'écrit le long d'un axe Oz vertical dirigé vers l'extérieur:

$$dI_v/dz = \rho j_v - \rho k_v I_v$$

où I_v est l'intensité lumineuse, ρ la masse volumique, j_v l'émission et k_v le coefficient d'absorption. Au centre du disque en l'absence d'émission, on peut supposer que $j_v = 0$ d'où

$$dI_v/dz = -\rho k_v I_v = -N \sigma(v) I_v$$

où N est le nombre d'atomes par unité de volume et $\sigma(v)$ la section efficace d'interaction photon/matière vue ci dessus. Si l'on suppose pour simplifier que N et $\sigma(v)$ sont indépendants de z , cette équation s'intègre et donne $I_v(z) = I_v(0) \exp[-N \sigma(v) z]$. On peut prendre, s'il s'agit de la photosphère à la température supposée uniforme T , $I_v(0) = B_v(T)$ où $B_v(T)$ est la fonction de Planck. Dans ce cas, $I_v(z) = B_v \exp[-N \sigma(v) z] \approx B_v - B_v N \sigma(v) z$. S'il y a plusieurs raies de plusieurs éléments chimiques, alors:

$$I_v(z) \approx B_v - B_v z [\sum N_i \sigma_i(v)]$$

L'intensité résulte donc de deux composantes: un spectre continu B_v auquel se superposent des raies d'absorption représentées par le second terme $- B_v z [\sum N_i \sigma_i(v)]$.

Formation du spectre d'émission au limbe

Au limbe au dessus du disque en l'absence d'absorption, on peut supposer que $k_v = 0$ d'où

$$dI_v/dz = \rho j_v \text{ avec } j_v = k_v B_v = N \sigma(v) B_v.$$

Si l'on suppose pour simplifier que N et $\sigma(v)$ sont indépendants de z , cette équation s'intègre et donne $I_v(z) = B_v N \sigma(v) z$. S'il y a plusieurs raies de plusieurs éléments chimiques, on a:

$$I_v(z) = B_v z [\sum N_i \sigma_i(v)] \quad \text{Il s'agit d'un spectre de raies en émission.}$$

4 – Loi de Boltzmann de distribution des niveaux d'énergie en équilibre thermodynamique

Soit N_n et N_m les nombres d'atomes respectivement aux niveaux d'énergie E_n et E_m , chaque niveau d'énergie i ayant un poids statistique g_i . La loi de Boltzmann permet de connaître la répartition des atomes en fonction de leur niveau d'énergie :

$$N_n / N_m = (g_n / g_m) \exp - [(E_n - E_m) / kT]$$

k constante de Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}$ MKSA), T température du milieu en Kelvins.

g_n est le poids statistique du niveau n ou nombre d'états de même énergie.

Par exemple :

$g_n = 2 n^2$ pour le niveau n des atomes de type hydrogénoïde (le facteur 2 vient du spin)

$g_J = 2J+1$ pour un atome dans un état $^{2S+1}L_J$ (L , S , J moment cinétique orbital, de spin, et total)

5 - Loi de Maxwell de distribution des vitesses ; profil Doppler ; largeur Doppler

La fonction de distribution du module des vitesses v d'un gaz d'atomes de masse m en équilibre thermodynamique à la température T est donnée par la loi :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp(-1/2 m v^2 / kT) 4 \pi v^2 \quad \text{avec} \quad \int_0^\infty f(v) dv = 1$$

Cette fonction de distribution présente un maximum pour $v_{\max} = (2kT / m)^{1/2}$

La *vitesse moyenne* est $\langle v \rangle = \int v f(v) dv / \int f(v) dv = 2 v_{\max} / \sqrt{\pi} = [8kT / (\pi m)]^{1/2}$

On a typiquement 14 km/s dans la photosphère et 145 km/s dans la couronne pour de l'Hydrogène ou des protons.

La *vitesse quadratique moyenne* est $\langle v^2 \rangle = \int v^2 f(v) dv / \int f(v) dv = 3/2 v_{\max}^2 = \boxed{3 kT / m}$

de sorte que *l'énergie cinétique moyenne* est $\langle E_c \rangle = 1/2 m \langle v^2 \rangle = \boxed{3/2 kT}$

Lorsque l'on s'intéresse au mouvement des particules dans une seule direction de l'espace (cas de l'effet Doppler thermique par exemple), on utilise la forme suivante de la loi de Maxwell :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp(-1/2 m v^2 / kT)$$

L'effet Doppler mène à un décalage en fréquence tel que $(v - v_0) / v_0 = v / C$ où v_0 est la fréquence au repos et l'on obtient un profil Doppler **gaussien** dont la distribution en fréquence est :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp[-1/2 m C^2 ((v - v_0)^2 / v_0^2) / kT] = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp[-((v - v_0)^2 / \Delta v_D^2)]$$

La quantité $\Delta v_D = (v_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}$ s'appelle largeur Doppler du profil.

Sa demi largeur à mi hauteur vaut $\Delta v = (\ln 2)^{1/2} \Delta v_D = (v_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$

En longueur d'onde, avec λ_0 longueur d'onde au repos, on obtient $\Delta \lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}$

largeur Doppler, et

$\Delta \lambda = (\ln 2)^{1/2} \Delta \lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$ demi largeur à mi hauteur du profil

On retient que la *largeur totale à mi hauteur* est $2\Delta \lambda = 2 (\lambda_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$

Plus la température est élevée, et plus la masse des atomes constituant le gaz est faible, plus la largeur Doppler est grande. A titre d'exemple, on trouve :

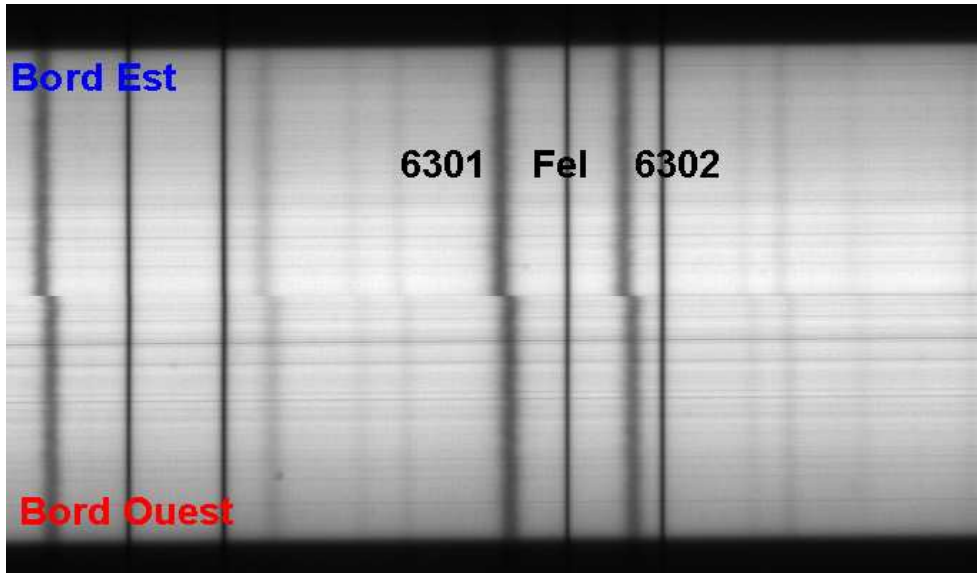
H α : $T = 10^4$ K, $2\Delta \lambda = 0.47$ Å dans la chromosphère

Fe : $T = 10^4$ K, $2\Delta \lambda = 0.06$ Å dans la photosphère

Fe : $T = 10^6$ K, $2\Delta \lambda = 0.62$ Å dans la couronne (raies élargies par la température)

6 – Vitesses Doppler macroscopiques (déplacements de matière)

Lorsqu'un déplacement de matière macroscopique se produit, les raies sont décalées en bloc de la quantité $\Delta\lambda = \lambda V/C$ où V est la vitesse de la matière. Le décalage spectral se fait vers les courtes longueurs d'onde lors d'un mouvement d'approche (blueshift) et vers les grandes longueurs d'onde lors d'un mouvement d'éloignement (redshift). L'effet Doppler ne permet de mesurer que la projection du vecteur vitesse sur la ligne de visée.



Effet Doppler aux bords EST et OUEST du Soleil: les raies telluriques fines ont une position invariable.

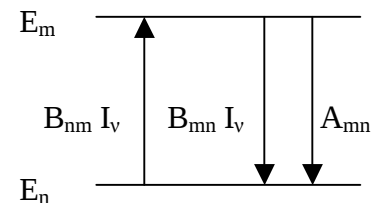
7 – Coefficients d'Einstein et équilibre statistique; loi de Planck, rayonnement du corps noir

Considérons l'équilibre statistique entre deux niveaux m et n à la température T . Soit N_m et N_n les densités volumiques (en m^{-3}) des populations des niveaux m et n , soumises par ailleurs à l'intensité spectrale de rayonnement I_ν ($W m^{-2} Hz^{-1} st^{-1}$).

La variation de population du niveau m est donnée par :

$$dN_m/dt = - A_{mn} N_m - B_{mn} N_m I_\nu + B_{nm} N_n I_\nu$$

émission spontanée *émission induite* *absorption*



Les coefficients A_{mn} , B_{mn} et B_{nm} sont les coefficients d'Einstein (tabulés). A_{mn} se mesure en s^{-1} et mesure l'inverse de la durée de vie des niveaux (facteur d'amortissement γ des raies).

A l'équilibre statistique, on a $dN_m/dt = 0$, d'où l'on tire :

$$I_\nu = (A_{mn}/B_{mn}) / [(B_{nm} N_n / B_{mn} N_m) - 1]$$

D'après la loi de Boltzman, $N_n/N_m = (g_n/g_m) \exp [-(E_n-E_m)/kT]$, et d'autre part I_ν est égale à l'intensité spectrale de rayonnement du corps noir B_ν , d'où il vient :

$$I_\nu = (A_{mn}/B_{mn}) / [(B_{nm} g_n / B_{mn} g_m) \exp(-(E_n-E_m)/kT) - 1] = \boxed{B_\nu = (2 h \nu^3 / C^2) / [\exp(h\nu / kT) - 1]}$$

C'est l'intensité spectrale du corps noir qui se mesure en $W st^{-1} m^{-2} Hz^{-1}$ (st = stéradian).

En identifiant, on trouve : $A_{mn}/B_{mn} = 2 h \nu^3 / C^2$ et $B_{mn} g_m = B_{nm} g_n$, avec $h \nu = E_m - E_n$

Les coefficients A_{mn} sont reliés au coefficient d'amortissement phénoménologique γ introduit plus haut dans les sections efficaces. En effet, sans champ de rayonnement, on a :

$$dN_m/dt = - \sum_{n < m} A_{mn} N_m = - N_m \sum_{n < m} A_{mn} = - N_m \gamma_m \text{ avec } \boxed{\gamma_m = \sum_{n < m} A_{mn} = 1/\tau_m}$$

γ_m est l'inverse de la durée de vie τ_m du niveau m

Les coefficients B_{mn} sont reliés aux forces d'oscillateur par $f_{mn} = (\epsilon_0 m C / \pi e^2) B_{mn} h \nu_{mn}$

RAPPEL: $I_\nu = B_\nu$ à l'équilibre thermodynamique

Paradoxalement, le spectre continu du soleil et des étoiles est proche du spectre de corps noir B_ν (objet à l'équilibre thermodynamique de température uniforme T). L'intensité spectrale B intégrée sur les fréquences vaut :

$$B = \sigma T^4 / \pi \text{ en } W \text{ st}^{-1} m^{-2}$$

avec $\sigma = 2 \pi^5 k^4 / (15 C^2 h^3) = 5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ constante de Stefan

et la puissance en Watts rayonnée par $1 m^2$ de corps noir dans toutes les directions de l'espace (4π stéradian) est égale à σT^4 (en $W m^{-2}$).

8 – Amortissement collisionnel ; théorie de l'impact de Weisskopf

Les collisions, tout comme l'agitation thermique que nous avons vue (Doppler thermique), constituent un facteur important d'élargissement des raies. Nous allons utiliser ici la théorie la plus simple, celle de l'impact de Weisskopf, qui a ensuite entraîné de nombreux développements.

Soit t_c la durée entre deux collisions. On assimile l'atome perturbé par la collision à un oscillateur harmonique qui émet pendant le temps T fini un train d'onde de la forme $A e^{2i\pi\nu_0 t}$, ν_0 étant la fréquence propre de l'oscillateur. Le spectre de puissance de ce train d'onde de durée finie T est égal à $|F(\nu)|^2$ où $F(\nu)$ est la transformée de Fourier que l'on calcule par :

$$F(\nu) = A \int_0^T e^{2i\pi\nu_0 t} e^{-2i\pi\nu t} dt = A (e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)T} - 1) / (2i\pi(\nu_0 - \nu))$$

Weisskopf suppose que la densité de probabilité pour que le temps entre deux collisions soit égal à T est une loi exponentielle de marche au hasard du type $(1/\tau) e^{-T/\tau}$ où τ est le temps **moyen** entre deux collisions, avec la normalisation $\int (1/\tau) e^{-T/\tau} dT = 1$. Le spectre de puissance moyen des trains d'onde est alors donné par :

$$E(\nu) = \int_0^{+\infty} |F(\nu)|^2 (1/\tau) e^{-T/\tau} dT = |A|^2 \int_0^{+\infty} [\sin^2(\pi(\nu_0 - \nu)T) / (\pi^2(\nu_0 - \nu)^2)] e^{-T/\tau} d(T/\tau)$$

Faisons le changement de variable $u = T/\tau$, il vient :

$$E(\nu) = |A|^2 \int_0^{+\infty} [\sin^2(\pi(\nu_0 - \nu) \tau u) / (\pi^2(\nu_0 - \nu)^2)] e^{-u} du = |A|^2 / (2\pi^2) / [(\nu_0 - \nu)^2 + (1/2\pi\tau)^2]$$

On normalise la fonction $E(\nu)$ telle que $\int E(\nu) d\nu = 1$, et on obtient :

$$\boxed{E(\nu) = (1/\pi) (\gamma/4\pi) / [(\nu_0 - \nu)^2 + (\gamma/4\pi)^2] \text{ avec } \gamma = 2/\tau}$$

Il s'agit donc d'un **profil Lorentzien d'amortissement** $\gamma = 2/\tau$ de demi largeur en fréquence $\gamma/4\pi$

La difficulté consiste maintenant à évaluer l'amortissement γ , donc τ . Pour ce faire, on introduit la section efficace de collision σ (m^2) avec les particules fixes, qui est telle que :

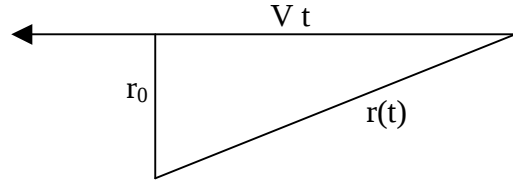
$$\sigma N (V \tau) = 1$$

avec N densité (m^{-3}) des particules perturbatrices, V leur vitesse moyenne, et τ temps moyen entre deux collisions, $V \tau$ étant la distance moyenne parcourue par les perturbateurs entre deux collisions.

Si la distribution des vitesses est une loi de Maxwell, on a $V = (8 k T / \pi m)^{1/2}$, T température, k constante de Boltzmann, m masse des projectiles. Connaissant σ , N et V , on en déduira $\tau = 1 / \sigma N V$.

Le calcul de σ revient au calcul du paramètre d'impact r_0 des perturbateurs, supposés aller en ligne droite à la vitesse constante V .

$$\sigma = \pi r_0^2$$



$r(t) = (r_0^2 + V^2 t^2)^{1/2}$ est la distance du projectile à l'instant t .

Weisskopf suppose que l'effet de la collision est de générer un changement de phase de l'oscillateur de la forme $\Delta\omega = C_p / r^p$

Où C_p est une constante et p un nombre entier dépendant de la nature de l'interaction :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p = 2 & \text{effet Stark linéaire (interaction Hydrogène + particule chargée)} \\ p = 3 & \text{collision résonante (interaction entre deux atomes identiques)} \\ p = 4 & \text{effet Stark quadratique (interaction atome + particule chargée)} \\ p = 6 & \text{forces de Van der Waals (interaction entre atomes de natures différentes)} \end{array} \right.$$

Weisskopf calcule alors le déphasage total introduit par la collision :

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\omega dt = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} (r_0^2 + V^2 t^2)^{-p/2} dt = C_p r_0^{-p} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + V^2 t^2 / r_0^2)^{-p/2} dt$$

On pose $u = V t / r_0$

$$\delta = C_p r_0^{-p+1} / V \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + u^2)^{-p/2} du \quad \text{où} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + u^2)^{-p/2} du = \sqrt{\pi} \Gamma((p-1)/2) / \Gamma(p/2) = \alpha_p$$

formule dans laquelle $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma telle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, avec la formule de récurrence $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, permettant de calculer le coefficient numérique α_p :

$\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = \pi/2$ et $\alpha_6 = 3\pi/8$ pour $p=2, 3, 4$ et 6 , selon la nature de la collision.

Le calcul du paramètre d'impact r_0 repose sur l'hypothèse $\delta = 1$, ce qui donne $r_0 = [V / (C_p \alpha_p)]^{1/1-p}$, dont on déduit l'amortissement :

$$\gamma = 2/\tau = 2 \sigma N V = 2 \pi r_0^2 N V = 2 \pi N V [V / (C_p \alpha_p)]^{2/1-p}$$

Il est important de constater que l'amortissement γ varie comme $N V^{(p-3)/(p-1)}$, N et V étant respectivement la densité et la vitesse des particules perturbatrices, et lorsqu'on introduit la dépendance de V en fonction de la température T , γ varie comme $N T^{(p-3)/(2p-2)}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p = 2 & \text{effet Stark linéaire : } \gamma \text{ varie comme } N T^{-1/2} \\ p = 3 & \text{collision résonante : } \gamma \text{ varie comme } N \\ p = 4 & \text{effet Stark quadratique : } \gamma \text{ varie comme } N T^{1/6} \\ p = 6 & \text{forces de Van der Waals : } \gamma \text{ varie comme } N T^{3/10} \end{array} \right.$$

Cette présentation très simplifiée montre que, dans la photosphère et la chromosphère (T voisin de 10^4 K mais N variant de plusieurs ordres de grandeur), l'élargissement est proportionnel à N .

Il existe des tables donnant $\gamma = a N T^b$ en fonction du projectile et de l'atome perturbé. Dans le cas de l'interaction atome lourd / Hydrogène (cas des forces de Van der Waals), on a par exemple :

$$\gamma \approx 10^{-15} N T^{0.35} \text{ s}^{-1}$$

avec N densité des atomes d'Hydrogène en m^{-3} . Il est intéressant de comparer le rapport des largeurs collisionnelles et naturelles $\gamma_{\text{coll}} / \gamma_{\text{nat}}$ dans l'atmosphère solaire sachant qu'une valeur typique de la largeur naturelle est $\gamma_{\text{nat}} = 10^8 \text{ s}^{-1}$.

La photosphère s'étend de 0 à 500 km, et la chromosphère de 500 à 2000 km d'altitude. Sur 2000 km, la température T varie peu, mais la densité N décroît considérablement.

variation de T de 0 → 500 km → 2000 km : 6400 K → 4170 K → 10000 K ($T \approx \text{constante}$)
 variation de N de 0 → 500 km → 2000 km : $2 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3} \rightarrow 2 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \rightarrow 2 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ (variation 10^6)

donne la variation de $\gamma_{\text{coll}} / \gamma_{\text{nat}}$ de 0 → 500 km → 2000 km : **40 → 0.3 → 10^{-4}**

L'élargissement collisionnel, lorentzien, est important dans la photosphère et s'efface donc dans la chromosphère.

Pour convertir en longueur d'onde, on utilise $\Delta\lambda = \lambda_0 \gamma / v_0 = \lambda_0^2 \gamma / C$ où λ_0 est la longueur d'onde de la raie. La largeur naturelle, en longueur d'onde, étant de l'ordre de $10^{-3} \text{ \AA}$, on en déduit que la largeur collisionnelle est au plus de l'ordre de $40 \cdot 10^{-3} \text{ \AA} = 0.04 \text{ \AA}$ dans la photosphère, ce qui reste inférieur à l'élargissement Doppler (gaussien), compris selon l'élément entre **0.5 \AA** (Hydrogène) et **0.05 \AA** (Fer) dans la photosphère ou dans la chromosphère.

9 – Convolution des sections efficaces Gaussiennes et Lorentziennes, profil de Voigt

La demi largeur Doppler $\Delta\lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}$ est souvent insuffisante pour rendre compte de la largeur réelle des profils de raie, c'est pourquoi on est souvent appelé à introduire une vitesse de macroturbulence supplémentaire v_m de distribution Gaussienne, tout comme la distribution des vitesses thermiques est gaussienne autour de $v_t = (2kT / m)^{1/2}$.

On sait que le produit de convolution de deux Gaussiennes de paramètres **a** et **b** est une nouvelle gaussienne de paramètre égal à **(a² + b²)^{1/2}**

La demi largeur Doppler devient donc $\Delta\lambda_D = (\lambda_0 / C) (v_m^2 + v_t^2)^{1/2} = (\lambda_0 / C) (v_m^2 + 2 k T / m)^{1/2}$

En ce qui concerne les profils Lorentziens, le produit de convolution de deux Lorentziennes de paramètres **a** et **b** est une nouvelle Lorentzienne de paramètre égal à **(a + b)**.

les largeurs naturelles des niveaux de la transition γ_m , γ_n et collisionnelles γ_{coll} sont donc additives.

Le profil de la section efficace résultante est donc la convolution d'une Gaussienne de largeur Doppler équivalente:

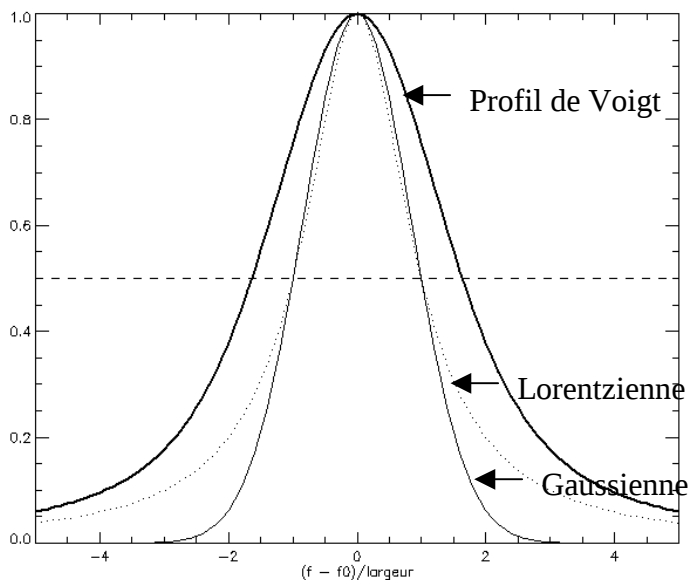
$$\Delta v_D = (v_0 / C) (v_m^2 + v_t^2)^{1/2},$$

et d'une Lorentzienne de largeur équivalente:

$$\Gamma / 4\pi = [\gamma_m + \gamma_n + \gamma_{\text{coll}}] / 4\pi,$$

que l'on appelle profil de Voigt, donné par la fonction de Harris, calculable numériquement :

$$H(a,u) = (a/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} / (a^2 + (u-y)^2) dy \quad \text{où } u = (v - v_0) / \Delta v_D \text{ et } a = \Gamma / (4\pi \Delta v_D)$$



Exemple de section efficace à profil de Voigt, qui est la convolution:

- d'une section efficace Lorentzienne de largeur à mi hauteur $\Gamma/4\pi$
- d'une section efficace Gaussienne de largeur à mi hauteur $(\ln 2)^{1/2} \Delta\nu_D$

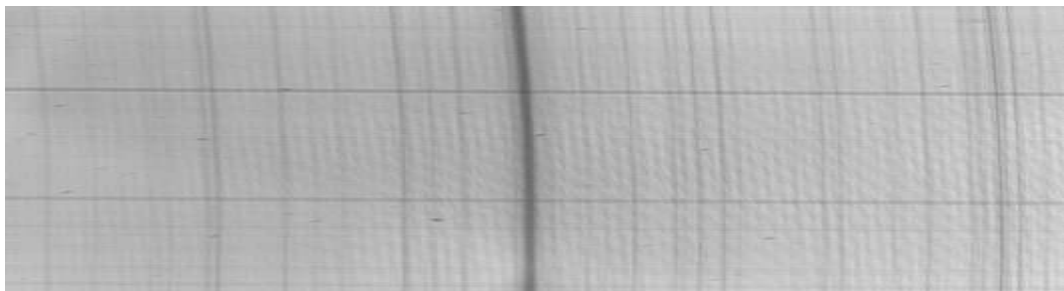
Le cœur du profil de Voigt est de type Gaussien alors que les ailes sont de type Lorentzien

10 - TP et Expériences

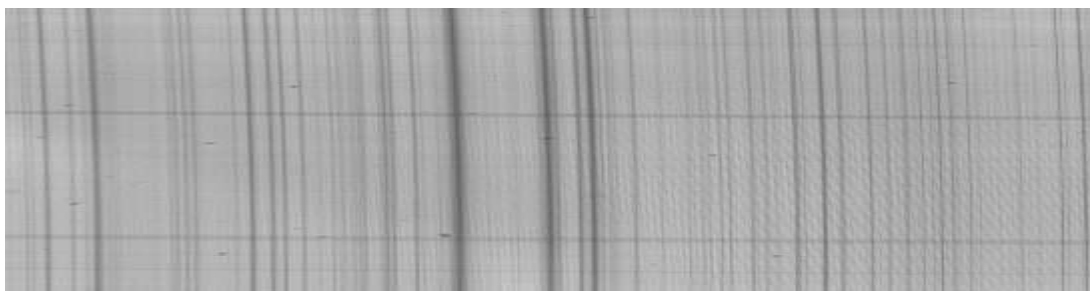
a) TP n°1: spectre détaillé du soleil

On dispose d'un petit spectrographe LHIRES de résolution $R = 18000$ (c'est à dire environ 0.03 nm ou $0.3 \text{ \AA}$) permettant d'observer le spectre solaire en bandes de 10 nm environ. En installant le spectrographe directement dans le faisceau de la Tour Solaire, ou bien au foyer d'une petite lunette, acquérir le spectre solaire de 380 nm à 700 nm par bandes de 10 nm en tournant le réseau de diffraction. La résolution optique étant de $0.3 \text{ \AA}$, il faut avoir un échantillonnage inférieur ou égal à $0.15 \text{ \AA}$, échantillonnage qui dépend de la caméra employée (ATIK ou PIXELINK).

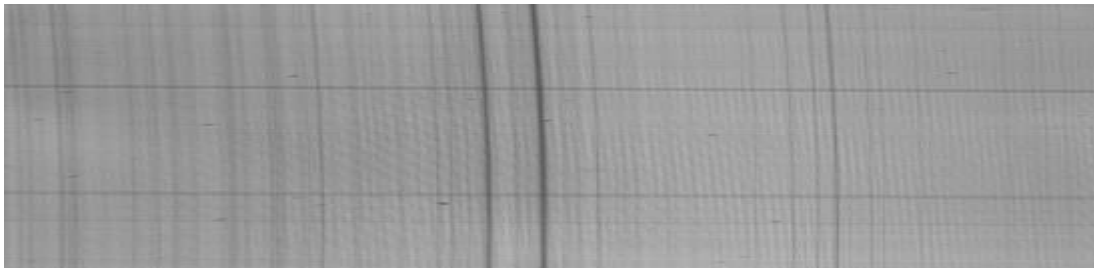
- Quantifier et optimiser l'échantillonnage du spectre (dépend de la caméra utilisée)
- Rendre homogène la valeur moyenne de chaque bande
- Tenter de raccorder les bandes entre elles en longueur d'onde par recouvrement
- Essayer d'identifier les raies de Fraunhofer
- Produire un spectre sous la forme d'une longue bande unique



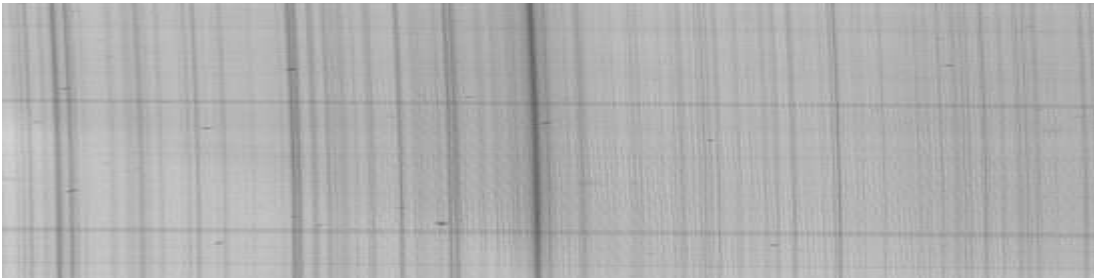
Raie Halpha de l'Hydrogène (domaine autour de 650 nm)



Triplet du Magnésium (domaine autour de 520 nm)



Doublet du Sodium (domaine autour de 590 nm)



Raie Hbeta de l'Hydrogène (domaine autour de 490 nm)

b) TP n°2: Elargissement Doppler des raies et température

Prendre au centre du soleil des profils de la raie $H\alpha$ et d'une raie du Fer, par exemple 630.15 nm. Estimer leur largeur à mi hauteur. En supposant que l'élargissement des raies est purement Doppler, en déduire l'ordre de grandeur de la température.

c) TP n°3: Vitesse de rotation du soleil

Effectuer un spectre d'une raie du Fer (domaine spectral vers 630.1 nm par exemple) aux bords EST et OUEST du soleil au voisinage de l'équateur. Déduire du décalage Doppler des deux spectres la vitesse de rotation du soleil en km/s puis sa vitesse angulaire en degrés par jour. On donne le rayon solaire: $R = 700\,000\text{ km}$.

d) TP n°4: Effet Evershed sur les taches

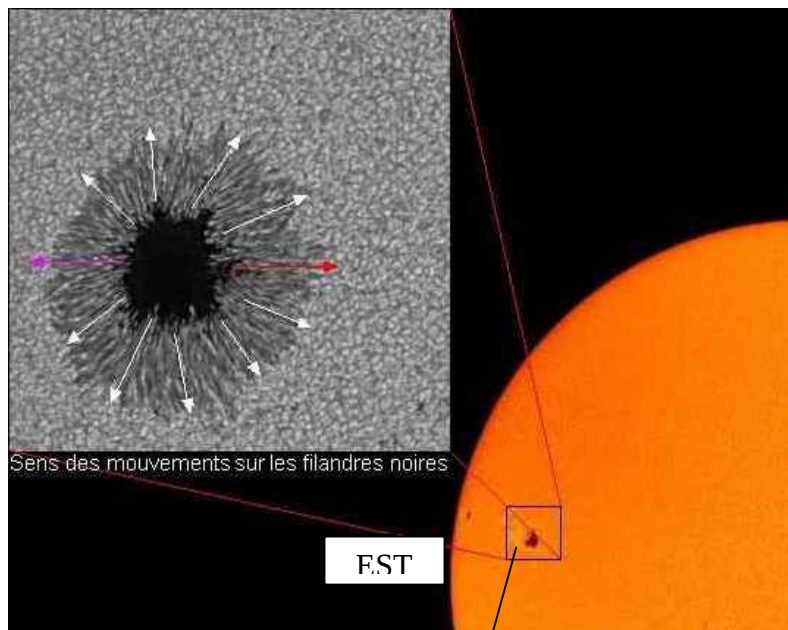
Dans la pénombre des taches, il existe des mouvements de matière plus ou moins radiaux de quelques km/s dirigés de l'ombre vers l'extérieur: c'est l'effet Evershed. Ces mouvements étant à prédominance horizontale, ils seront mieux détectés par effet Doppler sur les raies spectrales dans une tache proche du limbe solaire, à cause de la perspective. On y observera un "redshift" côté limbe et un "blueshift" côté centre disque. Utiliser de préférence une raie du Fer non sensible au champ magnétique, par exemple FeI 557.6 nm.

Imaginer un mécanisme expliquant l'effet Evershed, sachant que les champs magnétiques décroissent de l'intérieur de la tache (ombre) vers sa périphérie (pénombre). Une valeur typique des champs au centre des taches est de 0.1 T.

On pourra penser à la loi de Bernoulli le long d'une ligne fluide pour chercher une explication simple:

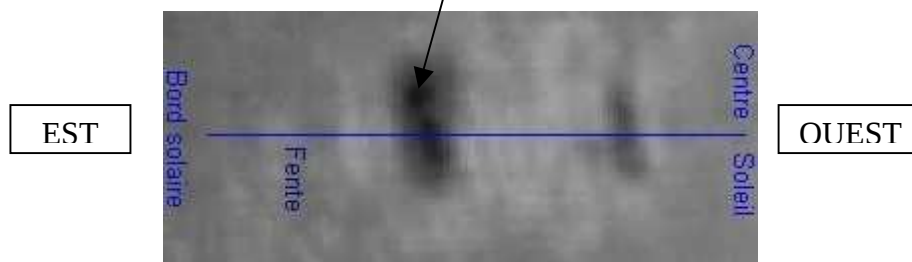
$$P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{constante}$$

où P est la pression gazeuse, $\rho g z$ la densité d'énergie potentielle de pesanteur et $\frac{1}{2} \rho V^2$ la densité d'énergie cinétique.

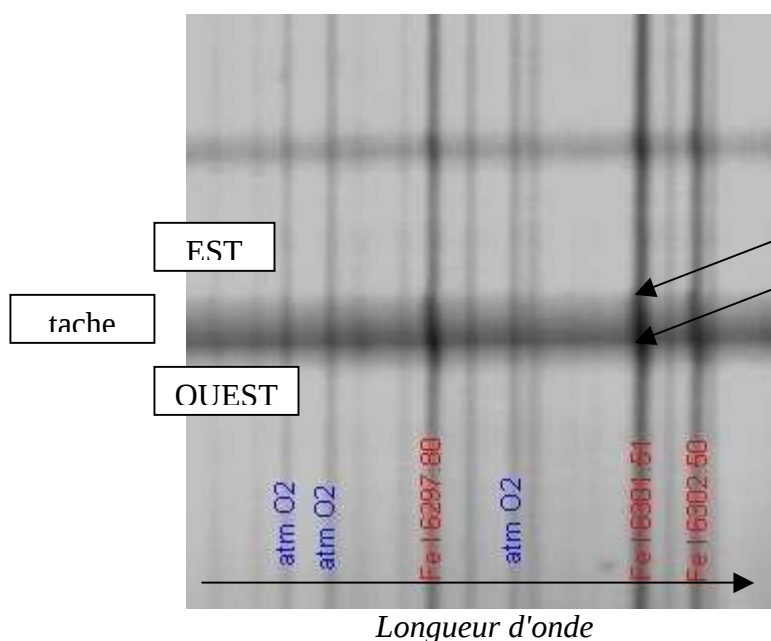


Remerciements à
André et Sylvain
Rondi pour ces
observations

Positionner la fente d'entrée du spectrographe sur une tache assez proche du limbe en orientant la fente dans le sens EST OUEST, à l'aide éventuellement d'un rotateur de champ permettant de choisir convenablement l'orientation.



Prendre quelques spectres de raies du fer comme 557.6 nm (insensible au champ magnétique). Sur l'exemple ci dessous, il s'agit des raies 630.1 nm et 630.2 nm (elles sont sensibles au champ magnétique, ce qui a l'inconvénient de mélanger les effets Doppler et Zeeman).



Pourquoi les raies
sont-elles inclinées ?
Estimer la différence
de vitesse Doppler
entre la partie EST
et la partie OUEST
de la tache. On
donnera le résultat
en km/s.

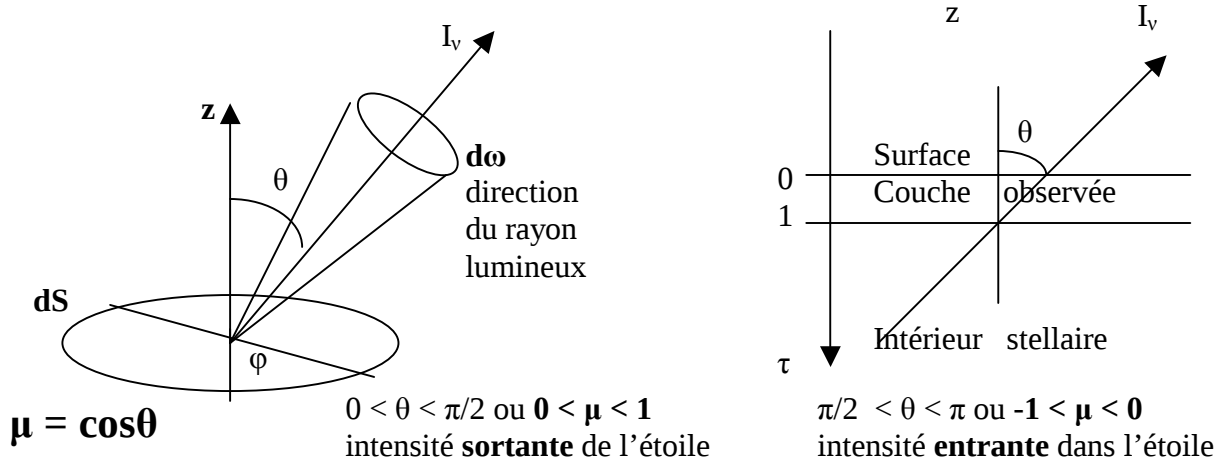
Chapitre 3

Introduction au transfert de rayonnement dans une atmosphère

Application: assombrissement centre bord du soleil

1 - Quelques définitions

Avant d'aborder l'équation de transfert de rayonnement, qui permet de calculer l'intensité lumineuse émergente I_ν (en $\text{W m}^{-2} \text{st}^{-1} \text{Hz}^{-1}$) d'une atmosphère en fonction de l'intensité lumineuse incidente ou des sources d'intensité internes S_ν , nous devons introduire quelques définitions de base.



On considère un pinceau lumineux sortant de la surface de l'étoile sous l'angle θ avec la normale dans l'angle solide $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ tel que $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$.

Le rayon sort de l'étoile si l'on a $0 < \theta < \pi/2$ ou si $0 < \mu = \cos\theta < 1$.

Il entre dans l'étoile si $\pi/2 < \theta < \pi$ ou $-1 < \mu = \cos\theta < 0$.

Quand on observe le centre du disque solaire, on est à $\theta = 0$, $\mu = 1$; quand on observe le limbe solaire, on est à $\theta = \pi/2$, $\mu = 0$.

On choisit un axe vertical Oz orienté vers l'extérieur de l'étoile et orthogonal à la surface. Par contre, la profondeur optique τ , nulle à la surface de l'étoile, augmente vers l'intérieur. La couche de l'étoile observée est à profondeur optique unité $\tau = 1$, le centre de l'étoile étant à profondeur optique infinie. On explicitera cette quantité plus loin.

L'intensité lumineuse I_ν se mesure en $\text{W st}^{-1} \text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$: c'est un flux (puissance par unité de surface, de fréquence et d'angle solide). L'énergie lumineuse qui passe dans le cône d'angle solide $d\omega$, au travers de la surface dS , dans le temps dt , et entre les fréquences ν et $\nu+d\nu$ est :

$$dE_\nu = I_\nu \cos\theta dS d\omega dt d\nu \quad \text{en Joules}$$

On définit l'intensité moyenne J_ν par $J_\nu = (1/4\pi) \int I_\nu d\omega$ (1) intégré sur les 4π stéradian de tout l'espace avec $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

Le flux d'énergie radiative traversant une surface dS sous l'angle θ est intégré sur les 4π stéradian de l'espace tel que $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$.

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta d\omega$$

L'intégrale ci dessus représente le flux total net, somme des flux entrants et sortants.

Le flux sortant est intégré pour $0 < \theta < \pi/2$ et le flux entrant sur $\pi/2 < \theta < \pi$.

Avec φ intégré de 0 à 2π : Flux sortant: $F_v = \int_0^{\pi/2} I_v \cos\theta \, d\omega$ Flux entrant: $F_v = \int_{\pi/2}^{\pi} I_v \cos\theta \, d\omega$

Si le champ de radiation est isotrope (indépendant des angles), par exemple lorsqu'on est en équilibre thermodynamique avec $I_v = B_v$ fonction de Planck, le flux net est nul, car $\int \cos\theta \, d\omega = \int \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0$ (pour $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$).

On définit aussi :

$$H_v = (1/4\pi) \int I_v \cos\theta \, d\omega = F_v / 4\pi \quad \text{et} \quad K_v = (1/4\pi) \int I_v \cos^2\theta \, d\omega$$

intégrés sur les 4π stéradian de l'espace tel que $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$.

H_v et K_v sont donc les moments de I_v pondérés par $\mu = \cos\theta$ d'ordre 1 et 2.

2 - Densité d'énergie radiative et pression radiative

Considérons un élément de volume dV , de section dS . La quantité d'énergie entrant dans dV par dS dirigée dans le pinceau d'angle solide $d\omega$ sous l'angle θ et pendant dt est égale à :

$$dE_v = I_v \cos\theta \, dS \, d\omega \, dt \, dv \quad \text{avec} \quad dV = dS \cos\theta \, C \, dt$$

On en déduit : $dS \cos\theta \, dt = dV / C$

$$dE_v / (dV \, dv) = I_v \, d\omega / C = dU_v$$

Intégrons sur les 4π stéradian :

$$\text{la quantité} \quad U_v = (1/C) \int I_v \, d\omega$$

est une densité volumique d'énergie par unité de fréquence, et se mesure en $\text{J m}^{-3} \text{Hz}^{-1}$

$$\text{Comme} \quad J_v = (1/4\pi) \int I_v \, d\omega, \quad \text{on en déduit :} \quad U_v = (4\pi / C) J_v \quad (\text{J m}^{-3} \text{Hz}^{-1})$$

Si le champ de rayonnement est **isotrope**, donc indépendant des angles, alors $\int I_v \, d\omega = I_v \int d\omega = 4\pi I_v$ et $U_v = (4\pi / C) I_v$ (en $\text{J m}^{-3} \text{Hz}^{-1}$)

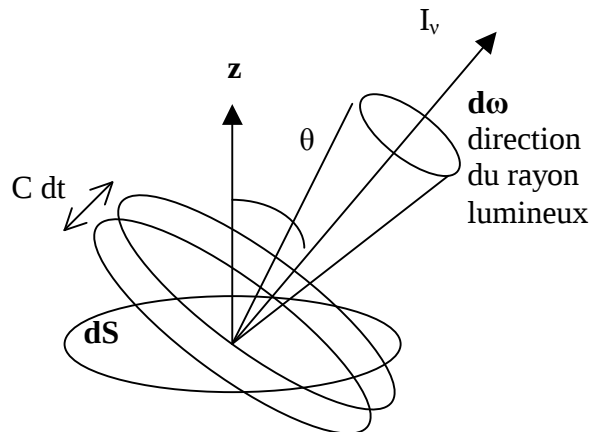
La pression du rayonnement qui s'exerce sur la surface dS se déduit de $dE_v = I_v \cos\theta \, dS \, d\omega \, dt \, dv$ de manière simple. Un déplacement $C \, dt$ des photons dans la direction d'angle solide $d\omega$ du rayon lumineux et durant de temps dt se traduit par un parcours dz sur Oz normal à la surface dS tel que $dz \cos\theta = C \, dt$, d'où $dt = dz \cos\theta / C$ et $dE_v = I_v \cos\theta \, dS \, d\omega \, (dz \cos\theta / C) \, dv$

$$\text{donc} \quad dE_v = I_v \cos^2\theta \, dS \, d\omega \, dz \, dv / C = I_v \cos^2\theta \, dV \, d\omega \, dv / C = P_{v,\omega} \, dV \, d\omega \, dv \quad (\text{avec} \quad dV = dS \, dz)$$

où $P_{v,\omega} = I_v \cos^2\theta / C$ est la pression radiative par stéradian et par unité de fréquence ($\text{Pa st}^{-1} \text{Hz}^{-1}$)

En intégrant sur les 4π stéradian pour $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$, on obtient la pression radiative par unité de fréquence:

$$P_v = \int I_v \cos^2\theta \, d\omega / C = (4\pi / C) K_v \quad (\text{en} \quad \text{Pa Hz}^{-1}) \quad (\text{remarque : } 1 \text{ Pa} = 1 \text{ J m}^{-3})$$



où $K_v = (1/4\pi) \int I_v \cos^2\theta d\omega$ (moment d'ordre 2 de l'intensité). La pression radiative correspond à un transfert d'impulsion d'origine photonique, la quantité de mouvement du photon étant égale à $h\nu / C$. Si le rayonnement est isotrope, $P_v = (I_v / C) \int \cos^2\theta d\omega = (4\pi/3) I_v / C$ (en Pa Hz⁻¹). La pression radiative totale intégrée sur les fréquences est alors $P = (4\pi/3) I / C$ (en Pa).

3 - Cas particulier : rayonnement isotrope (indépendant de θ et ϕ)

Si l'intensité de rayonnement I_v est isotrope, elle ne dépend pas des angles θ et ϕ , et les formules se simplifient. En intégrant une première fois sur ϕ de 0 à 2π , on obtient avec $\mu = \cos\theta$:

$d\omega = 2\pi \sin\theta d\theta = -2\pi d\mu$, et μ varie de 1 à -1 lorsque θ varie de 0 à π

$$\int d\omega = -\int_1^{-1} 2\pi d\mu = \int_{-1}^1 2\pi d\mu = 4\pi \quad \text{d'où l'on tire } J_v = I_v \text{ et } U_v = (4\pi / C) I_v$$

$$\text{De même, } \int \mu d\omega = \int_{-1}^1 2\pi \mu d\mu = 0 \quad \text{d'où l'on tire } H_v = F_v = 0$$

$$\text{et } \int \mu^2 d\omega = \int_{-1}^1 2\pi \mu^2 d\mu = 4\pi/3 \quad \text{d'où l'on tire } K_v = I_v / 3 \text{ et } P_v = (4\pi / C) I_v / 3$$

Comme la densité volumique d'énergie par unité de fréquence est $U_v = (4\pi / C) I_v$, on en déduit que $P_v = U_v / 3$. Pression radiative par unité de fréquence ou densité volumique d'énergie par unité de fréquence sont donc synonymes. On a en résumé :

Cas du rayonnement isotrope

$$J_v = I_v, \quad H_v = F_v = 0, \quad K_v = I_v / 3 = J_v / 3, \quad P_v = (4\pi / C) I_v / 3 = U_v / 3, \quad U_v = (4\pi / C) I_v$$

Le flux total net est nul, ce qui signifie que le flux entrant est égal au flux sortant (en valeur absolue), ils sont égaux à

$$F_{\text{out}} = 2\pi \int I_v \mu d\mu \quad \text{pour } \mu \text{ variant de } 0 \text{ à } 1, \text{ soit } F_{\text{out}} = \pi I_v$$

$$F_{\text{in}} = 2\pi \int I_v \mu d\mu \quad \text{pour } \mu \text{ variant de } -1 \text{ à } 0, \text{ soit } F_{\text{in}} = -\pi I_v$$

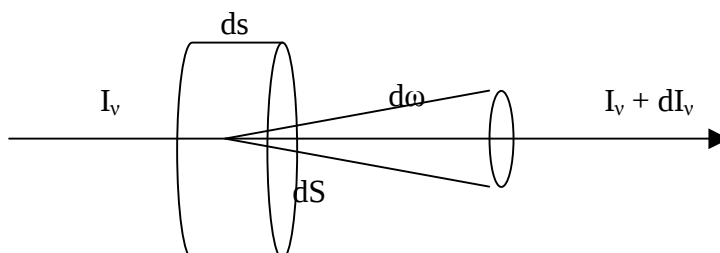
$$\text{On a bien } F_v = F_{\text{out}} + F_{\text{in}} = 0$$

4 - Diffusion, absorption, et émission du rayonnement

Pour résoudre les questions de transfert de rayonnement, on décrit les processus d'absorption, d'émission et de diffusion par des coefficients macroscopiques dépendant de la fréquence (les raies spectrales correspondent par exemple à une variation brusque du coefficient d'absorption ou d'émission dans un domaine de longueur d'onde très étroit de l'ordre de 0.1 nm). Considérons un volume dV de matière, de section dS et de longueur ds , de masse volumique ρ .

L'énergie absorbée par cet élément de volume pendant le temps dt , entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, par un pinceau lumineux dans l'angle solide $d\omega$ est :

$$dE_v = k_v I_v \rho dS ds d\nu d\omega dt$$



où k_v est le **coefficient d'absorption** ou **opacité**, relié à la section efficace σ d'absorption par la relation :

$$k_v \rho = \sigma N$$

Le produit $k_v \rho$ ds est **sans unité**. σ s'exprime en m^2 , N est le nombre de particules par unité de volume en m^{-3} , ρ la masse volumique en $kg\ m^{-3}$, donc k_v s'exprime en $m^2\ kg^{-1}$.

Le **libre parcours moyen des photons** (en mètres) est donné par $lpm = 1 / (k_v \rho) = 1 / (\sigma N)$

En présence de processus de diffusion, on introduit un coefficient de diffusion, souvent appelé σ_v de même unité que k_v (et à ne pas confondre avec une section efficace) de telle sorte que l'énergie diffusée par l'élément de volume dV pendant le temps dt , entre les fréquences v et $v + dv$, par un pinceau lumineux dans l'angle solide $d\omega$ est:

$$dE_v = \sigma_v I_v \rho dS ds dv d\omega dt$$

Ainsi, l'effet combiné absorption/diffusion se traduit par l'ajout des coefficients $k_v + \sigma_v$

L'énergie émise par l'élément de volume pendant le temps dt , entre les fréquences v et $v + dv$, par un pinceau lumineux dans l'angle solide $d\omega$ est:

$$dE_v = j_v \rho dS ds dv d\omega dt$$

j_v , coefficient d'émission, se mesure en $W\ kg^{-1}\ Hz^{-1}\ st^{-1}$ j_v est homogène à $k_v I_v$

A l'équilibre thermodynamique avec le champ de rayonnement, on a $I_v = B_v(T)$ où $B_v(T)$ est la fonction de Planck, T la température, donc $j_v = k_v B_v(T)$. Lorsqu'on fait l'hypothèse, dans un milieu de température non uniforme, que les propriétés de la matière dans un petit volume sont les mêmes qu'à l'équilibre thermodynamique pour la température locale, on dit qu'on est en **ETL** (équilibre thermodynamique local).

5 - Equation de transfert du rayonnement

La variation d'énergie du pinceau qui traverse l'élément de volume dV pendant le temps dt , entre les fréquences v et $v + dv$, dans l'angle solide $d\omega$ est $dE_v = dI_v dS dv d\omega dt$ de sorte que:

$$dI_v dS dv d\omega dt = j_v \rho dS ds dv d\omega dt - k_v I_v \rho dS ds dv d\omega dt,$$

ce qui aboutit à l'équation de transfert $dI_v/ds = \rho (j_v - k_v I_v)$

On introduit la **fonction source** $S_v = j_v / k_v$ qui se mesure comme l'intensité en $W\ m^{-2}\ Hz^{-1}\ st^{-1}$

Avec cette définition, il vient : $dI_v/ds = -\rho k_v (I_v - S_v)$

La **profondeur optique** τ_v est définie par $d\tau_v = -k_v \rho ds$

Il s'agit d'un nombre sans dimension qui augmente lorsque l'on s'enfonce dans l'intérieur stellaire. La profondeur optique est nulle à la surface de l'étoile (au dessus de son atmosphère).

On admet que l'on observe la couche située à la profondeur optique 1 pour la longueur d'onde de référence souvent prise à $\lambda = 500\ nm$.

Dans le coeur des raies d'absorption, comme k_v est grand, la profondeur optique 1 est située plus haut dans l'atmosphère (ds petit) que dans le continu des raies (où k_v est petit, donc ds plus grand). Pour cette raison, on observe plus haut dans le coeur des raies que dans le continu des raies (par exemple, la chromosphère est visible dans le coeur des raies du Calcium ou des raies de Balmer de l'Hydrogène, alors que la photosphère apparaît dans les ailes des raies et les continus adjacents).

Avec cette définition, l'équation de transfert s'écrit

$$dI_v/d\tau_v = I_v - S_v$$

dont la forme générale en tenant compte de la direction θ faite entre le rayon lumineux et la normale à la surface est :

$$\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v$$

avec

$$\mu = \cos\theta$$

$d\tau_v = -k_v \rho ds = -\sigma N ds$, ds abscisse curviligne le long de la direction de propagation, k_v coefficient d'absorption, ρ masse volumique, ou une formulation équivalente avec σ section efficace (m^2), N nombre d'atomes par unité de volume (m^{-3}).

L'intensité $I_v = I_v(\nu, \tau_v, \mu)$ dépend de la fréquence ν , de la profondeur optique τ_v et de $\mu = \cos\theta$.

Dans une atmosphère plan parallèle, on aurait $d\tau_v = -k_v \rho dz$ et I_v dépendrait de ν , z , et μ .

La fonction source S_v est égale à la fonction de Planck $B_v = (2 h \nu^3 / C^2) / [\exp(h \nu / k T) - 1]$ lorsqu'on est en **ETL** à la température T avec le champ de rayonnement, en l'absence de diffusion.

D'une façon générale, si l'on a à l'**ETL** une contribution d'absorption et d'émission thermique (k_v , B_v), plus une diffusion continue des photons **isotrope** (σ_v , J_v , diffusion Thomson par les électrons libres, Rayleigh par les atomes ou les molécules, σ_v étant le coefficient de diffusion, J_v l'intensité moyenne), alors on écrira :

$$S_v = (k_v B_v + \sigma_v J_v) / (k_v + \sigma_v),$$

Soit $S_v = B_v$ en absorption/émission pure de rayonnement, ou $S_v = J_v$ en diffusion pure isotrope.

Dans le cas d'une raie spectrale superposée sur un fond continu, on aurait $k_v = k_{cv} + k_{rv} \Phi_v$ où k_{cv} désigne le coefficient d'absorption du continu, k_{rv} celui de la raie pondéré par le profil d'absorption de la raie Φ_v (un profil Lorentzien, Gaussien ou de Voigt en fonction de ν).

L'équation de transfert a pour solution générale :

$$I_v(\mu, \tau_1) = I_v(\mu, \tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + e^{\tau_1/\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu$$

Rappel: lorsque $0 \leq \mu \leq 1$ l'intensité est sortante de l'étoile; si $-1 \leq \mu \leq 0$ l'intensité est entrante.

Cas où $0 \leq \mu \leq 1$:

L'intensité est sortante et provient du centre de l'étoile où l'on fait l'hypothèse que $\tau_2 \rightarrow \infty$

On obtient alors en posant $\tau = \tau_1$:

$$I_v(\mu, \tau) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } 0 \leq \mu \leq 1$$

L'intensité émergente à la surface de l'étoile est donc $I_v(\mu, 0) = \int_0^{\infty} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu$

cas simples : $S(t) = a + b t$ donnera $I_v(\mu, \tau) = a + b \mu + b \tau$ et $I_v(\mu, 0) = a + b \mu$

$S(t) = a + b t + c t^2$ donnera $I_v(\mu, \tau) = a + b (\mu + \tau) + c (\tau^2 + 2\tau\mu + 2\mu^2)$ et $I_v(\mu, 0) = a + b \mu + 2c \mu^2$

Cas où $-1 \leq \mu \leq 0$:

L'intensité est entrante et on fait l'hypothèse que l'on connaît $I_v(\mu, 0)$ intensité entrante à la surface de l'étoile en $\tau_2 = 0$. On obtient alors en posant $\tau = \tau_1$:

$$I_v(\mu, \tau) = I_v(\mu, 0) e^{\tau/\mu} - e^{\tau/\mu} \int_0^{\tau} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } -1 \leq \mu \leq 0$$



Si l'on néglige l'intensité entrante à la surface de l'étoile, alors on obtient la solution

$$I_v(\mu, \tau) = -e^{\tau/\mu} \int_0^{\tau} S_v(t) e^{-t/\mu} dt / \mu \quad \text{pour } -1 \leq \mu \leq 0$$

6 - Transfert simplifié du rayonnement au travers d'une couche mince (photosphère)

Si l'on connaît le rayonnement émergent à la base de la photosphère solaire $I_v(\mu, \tau_2)$ en $\tau = \tau_2$, qui peut être considéré comme égal approximativement à la fonction de Planck B_v (spectre continu), alors on peut calculer l'intensité au sommet de la photosphère en $\tau = \tau_1$, connaissant la fonction source entre τ_1 et τ_2 . Considérons le haut de la photosphère comme surface de l'étoile (profondeur optique nulle) et supposons que la fonction source est nulle dans la photosphère, alors:

$$I_v(\mu, \tau_1) = B_v e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu}$$

Situons nous au sommet de la photosphère: $\tau_1 = 0$ implique $I_v(\mu, 0) = B_v e^{-\tau_2/\mu}$

Si le rayonnement est radial ($\mu = 1$) et si k_v et ρ sont indépendants de l'altitude z , alors $d\tau_v = -k_v \rho dz$ s'intègre et donne $\tau_v = -k_v \rho z$ ($z = 0$ à la surface de l'étoile, $z < 0$ à l'intérieur, dans la photosphère). Dans ce cas très simplifié, on a:

$$I_v(0) = B_v e^{k_v \rho z}$$

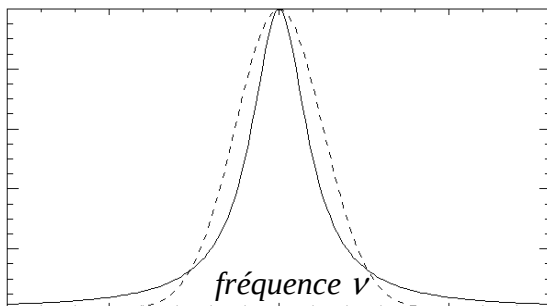
Appelons h l'épaisseur de la couche traversée ($z = -h$) et supposons que l'épaisseur optique correspondante ($k_v \rho h$) soit faible devant 1 (développement limité à l'ordre 1):

$$I_v(0) \approx B_v (1 - k_v \rho h) = B_v (1 - \sigma(v) N h)$$

On aura alors:

$$\begin{aligned} I_v(0) &\approx B_v \text{ en dehors des raies (spectre continu)} \\ I_v(0) &\approx B_v - B_v \sigma(v) N h \text{ dans les raies avec } \sigma(v) \text{ section efficace (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

$\sigma(v)$ a un profil typique gaussien ou lorentzien en fonction de la fréquence (ailes lorentziennes et coeur gaussien; $\sigma \rightarrow 0$ dans les ailes et on retrouve la fonction de Planck; σ grand dans les raies, et l'on obtient une dépression correspondant aux raies d'absorption de Fraunhofer, figures ci dessous).



Forme de la section efficace $\sigma(v)$ dans les raies spectrales (fréquence en abscisse).

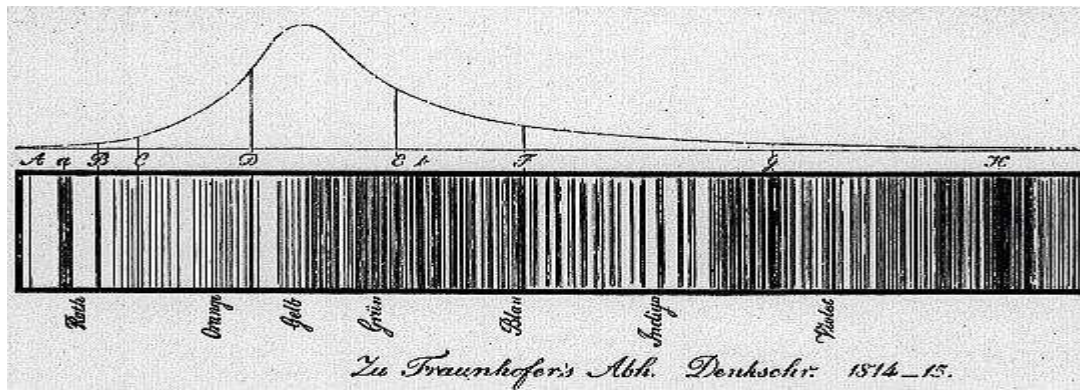
trait continu: lorentzienne en $1 / (a^2 + \nu^2)$

tirets: gaussienne en $e^{-\nu^2/b^2}$

(a et b constantes)

Fraunhofer Lines





Raies larges dites "de Fraunhofer" superposées au spectre continu du soleil

7 - Moments de l'équation de transfert du rayonnement à fonction source isotrope

Moment d'ordre 0 de l'équation de transfert: $\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v$

Il consiste à intégrer sur les 4π stéradian d'angle solide : $d[\int I_v \mu d\omega] / d\tau_v = \int I_v d\omega - \int S_v d\omega$

Remarquant que $\int I_v d\omega = 4\pi J_v$ et que $\int I_v \mu d\omega = 4\pi H_v$ et en faisant l'hypothèse que la fonction source S_v est isotrope, c'est à dire indépendante des angles θ et φ de telle sorte que $\int S_v d\omega = 4\pi S_v$, il vient avec $d\omega = -2\pi d\mu$, μ variant de 1 à -1 pour θ de 0 à π :

$$dH_v/d\tau_v = J_v - S_v$$

Moment d'ordre 1 de l'équation de transfert: $\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v$

Il consiste à multiplier par μ puis à intégrer sur les 4π stéradian d'angle solide :

$$d[\int I_v \mu^2 d\omega] / d\tau_v = \int I_v \mu d\omega - \int S_v \mu d\omega$$

Remarquant que $\int I_v \mu d\omega = 4\pi H_v$ et que $\int I_v \mu^2 d\omega = 4\pi K_v$ et en faisant l'hypothèse que la fonction source S_v est isotrope, c'est à dire indépendante des angles θ et φ de telle sorte que $\int S_v \mu d\omega = S_v \int \mu d\omega = 0$, il vient :

$$dK_v/d\tau_v = H_v$$

8 - Condition de l'équilibre radiatif

Une atmosphère est en équilibre radiatif si l'énergie perdue par un pinceau de rayonnement est égale à l'énergie reçue par ce pinceau :

Energie perdue :

$$\int_0^\infty \left[\int_{4\pi} k_v I_v d\omega \right] dv = \int_0^\infty k_v \left[\int_{4\pi} I_v d\omega \right] dv = 4\pi \int_0^\infty k_v J_v dv \text{ car par définition } J_v = (1/4\pi) \int_{4\pi} I_v d\omega$$

car k_v ne dépend pas de l'angle solide $d\omega$

Energie reçue :

$$\int_0^\infty \left[\int_{4\pi} j_v d\omega \right] dv = \int_0^\infty k_v \left[\int_{4\pi} S_v d\omega \right] dv = 4\pi \int_0^\infty k_v S_v dv \text{ car } j_v = k_v S_v \text{ et } S_v \text{ ne dépend pas de } \omega$$

La condition d'équilibre radiatif s'écrit donc ainsi :

$$\int_0^{\infty} k_v J_v dv = \int_0^{\infty} k_v S_v dv = \int_0^{\infty} j_v dv$$

Pour une **atmosphère grise** (k_v , J_v , S_v indépendants de v), cette égalité se traduit par $J = S$, J et S étant les quantités indépendantes de la fréquence. Cette égalité reste vraie pour les quantités J et S intégrées sur la fréquence si k_v en est indépendant (il sort alors des intégrales sur v).

Reprenons l'équation de transfert $(\mu/\rho) dI_v/dz = -k_v I_v + j_v$

Et intégrons sur l'angle solide et les fréquences.

$$(1/\rho) d/dz \left[\int_0^{\infty} \int_{4\pi} I_v \mu d\omega dv \right] = \int_0^{\infty} \int_{4\pi} (-k_v I_v + j_v) d\omega dv = \int_{4\pi} \int_0^{\infty} (-k_v I_v + j_v) dv d\omega = 0$$

En effet, l'équilibre radiatif impose la condition $\int_0^{\infty} (-k_v I_v + j_v) dv = 0$

Comme on a par définition $F_v = \int I_v \mu d\omega$, flux radiatif net, on en déduit :

$$dF/dz = 0 \text{ ou } F = \int F_v dv \text{ est le flux net intégré sur les fréquences}$$

Le flux total d'énergie radiative (entrant + sortant) est donc **constant** dans l'atmosphère.

A l'équilibre thermodynamique, lorsque $I_v = B_v$ fonction de Planck indépendante des angles θ et φ , on a $F = 0$ car $\int \mu d\omega = -2\pi \int \mu d\mu = 0$ ($\mu = \cos\theta$ variant de 1 à -1 et φ de 0 à 2π).

Le flux entrant est donc égal au flux sortant. Il se calcule aisément sachant que

$$B = \int_0^{\infty} B_v dv = \sigma T^4 / \pi \text{ en } W \text{ st}^{-1} m^{-2}$$

$$F_{out} = 2\pi \int_0^1 B \mu d\mu = \pi B = \sigma T^4 \text{ (en } W m^{-2}) \text{ et } F_{in} = -F_{out}$$

9 - Un modèle simple : le cas gris et l'assombrissement centre bord

L'atmosphère grise a pour particularité d'avoir ses quantités (intensité, fonction source, coefficient d'absorption) indépendants de la fréquence : c'est donc un modèle d'école qui n'existe pas, mais présente néanmoins l'intérêt d'expliquer correctement l'assombrissement centre bord du soleil.

Nous reprenons les équations de base :

$$\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v \text{ devient par intégration sur les fréquences } \mu dI/d\tau = I - S$$

avec $I = \int I_v dv$ et $S = \int S_v dv$

Nous supposons que la fonction source S est isotrope et peut se mettre sous la forme d'une fonction affine de la profondeur optique τ : $S(\tau) = a + b \tau$ où a et b sont deux constantes.

$$\text{L'équation de transfert a pour solution } I(\mu, \tau) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{-t/\mu} dt / \mu$$

Par intégration avec $S(\tau) = a + b \tau$, on obtient facilement $I(\mu, \tau) = a + b \mu + b \tau$

Par intégration sur les 4π stéradian ($0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$), on calcule J , H et K :

$J = (1/4\pi) \int I d\omega = (-1/2) \int I d\mu$ (car $d\omega = -2\pi d\mu$) pour θ variant de 0 à π donc μ de 1 à -1.

On trouve $J(\tau) = S(\tau) = a + b \tau$

$H(\tau) = (1/4\pi) \int I \mu d\omega = (-1/2) \int I \mu d\mu = b/3 = H = \text{constante}$, d'où l'on pose $b = 3 H$

Et le flux total net $F(\tau) = \int I \mu d\omega = 4\pi H(\tau) = 4\pi H = \text{constante}$

$K(\tau) = (1/4\pi) \int I \mu^2 d\omega = (-1/2) \int I \mu^2 d\mu = (a + b \tau)/3 = \underline{J(\tau)/3}$

Pour exprimer a en fonction de H , on doit examiner les flux sortant et entrant en $\tau = 0$:

$$F_{\text{out}} = -2\pi \int_1^0 I \mu d\mu = 2\pi (a/2 + b/3)$$

On a bien $F = F_{\text{out}} + F_{\text{in}} = 4\pi b/3 = 4\pi H$

$$F_{\text{in}} = -2\pi \int_0^{-1} I \mu d\mu = 2\pi (-a/2 + b/3)$$

La détermination de a résulte du fait qu'il n'y a aucun flux entrant dans l'étoile en $\tau = 0$:

$F_{\text{in}} = 0$ implique $a = (2/3) b = 2 H$, et par conséquent $F_{\text{out}} = F = 4\pi b/3 = 4\pi H$

En conclusion, on obtient le modèle simple :

$\begin{aligned} I(\mu, \tau) &= H (2 + 3 \mu + 3 \tau) \\ J(\tau) &= S(\tau) = H (2 + 3 \tau) \end{aligned}$

A la surface de l'étoile, on a $\tau = 0$, d'où : $I(\mu, 0) = H (2 + 3 \mu)$

Au centre du disque stellaire, on a $\mu = \cos\theta = 1$, d'où : $I(1, 0) = I_{\text{centre}} = 5 H$

On peut donc écrire la loi d'assombrissement centre bord : $I(\mu, 0) = I_{\text{centre}} (2/5 + 3/5 \mu)$

Celle ci prédit qu'**au limbe** ($\mu = \cos\theta = 0$) l'intensité n'est plus que de **0.4 I_{centre}**

Remarque importante sur le cas gris: justification de la fonction source

Le résultat, ici exact, **$K(\tau) = J(\tau)/3$** est souvent utilisé en première approximation dans les cas plus complexes et porte le nom « **d'approximation d'Eddington** ».

Dans une atmosphère où la fonction source est isotrope (c'est à dire indépendante des angles θ et φ), le moment d'ordre 0 de l'équation de transfert donne (paragraphe 7):

$$dH_v/d\tau_v = J_v - S_v$$

et le moment d'ordre 1 donne :

$$dK_v/d\tau_v = H_v.$$

Par intégration sur les fréquences, il vient **$dH/d\tau = J - S$** et **$dK/d\tau = H$**

Comme l'équilibre radiatif impose $\int k_v J_v dv = \int k_v S_v dv$, cette équation devient dans le cas gris (k_v constant) : $\int J_v dv = \int S_v dv$, c'est à dire **$J = S$** par intégration sur les fréquences.

Dans ce cas, on obtient $dH/d\tau = 0$ qui entraîne:

$H = \text{constante}$, et $K(\tau) = H \tau + \text{Cte}$.

L'hypothèse d'Eddington $K(\tau) = J(\tau)/3$ fournit $J(\tau) = 3 H \tau + \text{Cte} = S(\tau)$, et concorde avec notre postulat de départ, à savoir que la fonction source est une fonction affine de la profondeur optique.

Variation de la température avec la profondeur

La connaissance de $J(\tau) = S(\tau) = H(2 + 3\tau)$ permet d'établir une loi de variation de la température avec la profondeur optique, sachant qu'à l'équilibre thermodynamique on a $B_\nu = S_\nu$, où B_ν est la fonction de Planck. Après avoir intégré sur les fréquences on obtient $B = S$, avec (voir plus haut) :

$$B = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4 / \pi \text{ en } \text{W st}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

On en déduit $\sigma T^4 / \pi = H(2 + 3\tau)$, soit encore $T^4 = T_0^4 (1 + 3/2 \tau)$ **croissant avec τ** .
où T_0 est définie par $H = \sigma T_0^4 / (2\pi)$. $T_0 = T(\tau = 0)$ est la température **de surface** de l'étoile.

L'assombrissement centre bord traduit donc le fait que la température augmente avec la profondeur, ou décroît avec l'altitude. On peut relier la température de surface T_0 à la température effective T_{eff} en écrivant que le flux sortant de l'étoile, intégré sur les fréquences, est :

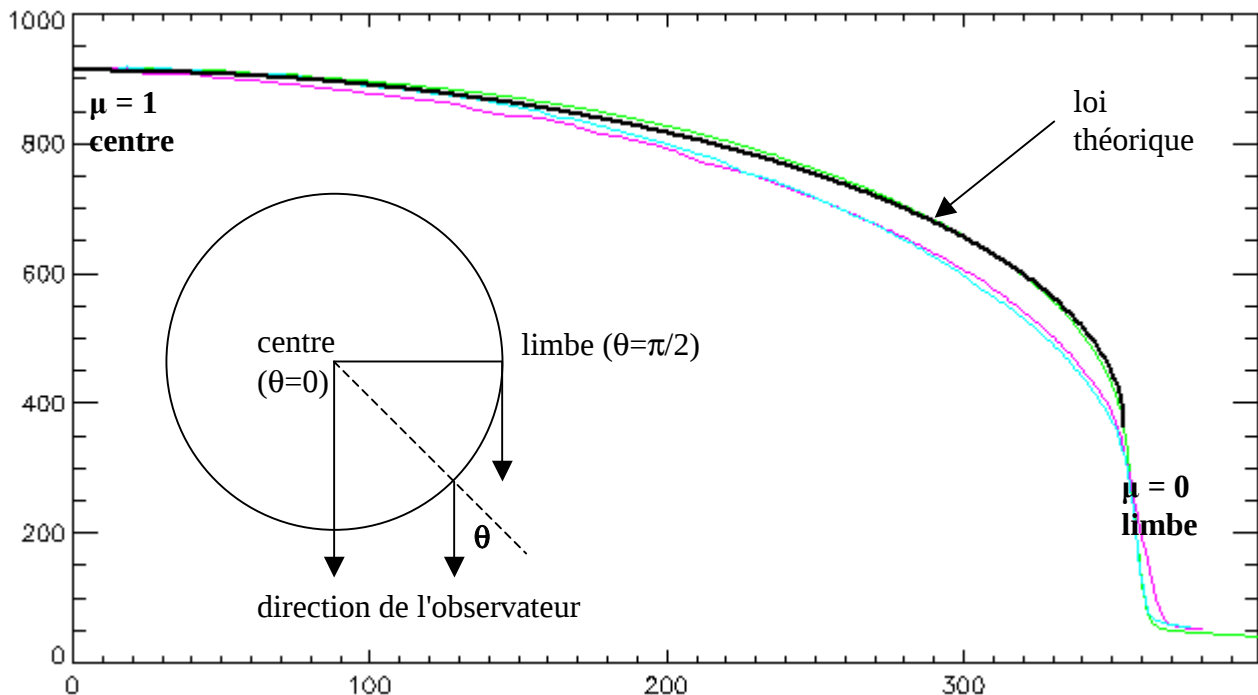
$$F_{\text{out}} = 4\pi H = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad \text{d'où } H = \sigma T_{\text{eff}}^4 / (4\pi) = \sigma T_0^4 / (2\pi),$$

Ce qui donne finalement $T_{\text{eff}}^4 = 2 T_0^4$, donc $T_0 = 2^{-1/4} T_{\text{eff}} \approx 0.84 T_{\text{eff}}$

Pour le soleil, $T_{\text{eff}} = 5750 \text{ K}$ donne $T_0 = 4850 \text{ K}$ (température du haut de la photosphère).

10 - TP: Mesure de l'assombrissement centre bord du soleil

Effectuer des observations du soleil avec plusieurs filtres larges ($>10 \text{ nm}$), ainsi qu'en lumière blanche. Tracer les courbes d'assombrissement centre bord en fonction de $\mu = \cos\theta$ ($0 < \mu < 1$). Le résultat est-il conforme aux prédictions théoriques ?

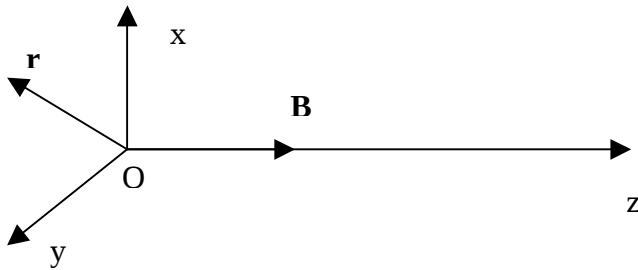


Chapitre 4

Effet Zeeman en théorie classique

L'effet Zeeman affecte les niveaux d'énergie et le rayonnement de l'atome lorsque celui-ci est plongé dans un champ magnétique. Dans ce chapitre, on prendra un modèle d'atome simplifié et assimilé à un oscillateur harmonique (électron) dont on étudiera les fréquences de giration dans le champ magnétique ainsi que le rayonnement dipolaire à grande distance. On utilisera ainsi les outils de l'électromagnétisme et de la mécanique classique introduits en L1/L2; une description complète et rigoureuse nécessiterait l'usage de la mécanique quantique. Nous verrons néanmoins que les principaux résultats peuvent être approchés par la théorie classique. On verra aussi que les caractéristiques du rayonnement (polarisation) peuvent être décrits par la théorie du rayonnement dipolaire électrique basée sur les potentiels retardés créés par l'électron.

1 - Mouvement de l'électron dans un champ magnétique



On choisit un champ magnétique uniforme et on oriente l'axe Oz tel que $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$

Le noyau de l'atome est en O et l'électron est situé à l'extrémité du vecteur $\mathbf{r}(x,y,z)$. Sa masse est m et sa charge -e. Il est soumis à une force de rappel $-k \mathbf{r}$ (oscillateur harmonique). On pose:

$$\omega_0^2 = k/m \text{ pulsation propre}$$

et

$$\omega_g^2 = eB/m \text{ pulsation gyromagnétique.}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit vectoriellement en négligeant la force électrique devant la force magnétique, ainsi que tout frottement:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \mathbf{r} - e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge B \mathbf{e}_z$$

En projection sur les axes, cette équation devient:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \omega_g \frac{dy}{dt} = 0 & (1) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y - \omega_g \frac{dx}{dt} = 0 & (2) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0 & (3) \end{cases}$$

La 3ème équation donne par exemple $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$, qui représente une vibration linéairement polarisée selon l'axe Oz de pulsation ω_0 dans la direction du champ magnétique.

Pour résoudre les deux premières équations, on pose $u = x + i y$ et on effectue (1) + i (2). Il vient:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u - i \omega_g \frac{du}{dt} = 0$$

$$\text{Posons } u = u_0 e^{i\omega t}, \text{ on obtient } u_0 e^{i\omega t} (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_0 \omega_g) = 0$$

Nous recherchons les solutions de $(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_0\omega_g) = 0$ telles que $\omega_g \ll \omega_0$. On obtient alors les deux solutions:

$$\boxed{\omega = \omega_g/2 + \omega_0 \text{ et } \omega = \omega_g/2 - \omega_0}, \text{ ce qui donne les deux solutions possibles:}$$

$\omega_L = \omega_g/2$ s'appelle pulsation de Larmor.

$$u_1 = u_0 [\cos(\omega_0 + \omega_g/2)t + i \sin(\omega_0 + \omega_g/2)t]$$

et

$$u_2 = u_0 [\cos((\omega_0 - \omega_g/2)t - i \sin((\omega_0 - \omega_g/2)t)]$$

En supposant que $u_0 = x_0$ (réel), on en déduit les deux vibrations suivantes selon la valeur de ω :

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 + \omega_g/2)t \\ y = x_0 \sin((\omega_0 + \omega_g/2)t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 - \omega_g/2)t \\ y = -x_0 \sin((\omega_0 - \omega_g/2)t \end{cases}$$

Ces vibrations décrivent un cercle, puisque $(x^2 + y^2) = \text{cte}$, elles sont polarisées circulairement droite et gauche selon le sens de rotation du vecteur $\mathbf{r}(x,y,0)$ dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. L'écart entre les deux pulsations étant $\Delta\omega = \omega_g$, on en déduit l'écart en longueur d'onde sachant que $\lambda = 2\pi/\omega$:

$$\Delta\lambda = \lambda^2 \Delta\omega / 2\pi C = \lambda^2 \omega_g / 2\pi C = (e / 2\pi m C) \lambda^2 B$$

On note par convention $\boxed{\Delta\lambda_B = (e / 4\pi m C) \lambda^2 B}$ de sorte que l'écartement est $\boxed{\Delta\lambda = 2 \Delta\lambda_B}$

et numériquement $\boxed{\Delta\lambda_B = 4.67 \cdot 10^{-13} \lambda^2 B}$ avec B en Gauss (1 G = 10^{-4} T), λ et $\Delta\lambda_B$ en Angströms.

La mécanique quantique transforme cette expression en introduisant simplement un facteur multiplicatif, le facteur de Landé équivalent g^* de la transition (ce facteur est tabulé):

$$\boxed{\Delta\lambda_B = (e / 4\pi m C) g^* \lambda^2 B = 4.67 \cdot 10^{-13} g^* \lambda^2 B} \quad \text{avec } \underline{B \text{ en Gauss, } \lambda \text{ et } \Delta\lambda_B \text{ en Angströms.}}$$

On note que l'écart $\Delta\lambda_B$ est proportionnel au module B du champ magnétique.

2 - Rayonnement dipolaire électrique

On a vu ci dessus que l'électron en présence de champ magnétique dirigé selon se comporte comme un dipôle de moment dipolaire

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z + p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$$

$\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ est polarisé linéairement (ou orienté) selon $\mathbf{e}_z$ (**la norme de $\mathbf{p}_1$ varie**)

$\mathbf{p}_0 = p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$ est polarisé circulairement dans un plan orthogonal à $\mathbf{e}_z$ (**la norme de $\mathbf{p}_0$ est constante**) avec $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ (polarisation gauche, $\mathbf{p}_0$ tourne vers la gauche) ou $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$ (polarisation droite, $\mathbf{p}_0$ tourne vers la droite). Il y a donc 3 pulsations distinctes.

Le rayonnement dipolaire électrique s'obtient à la distance r du dipôle et à l'instant t (cours L2) par la théorie des potentiels retardés qui considère l'état du dipôle à l'instant $\mathbf{t} - \mathbf{r}/C$ pour tenir compte du temps de propagation à la vitesse de la lumière C.

Le potentiel vecteur est:

$$\mathbf{A} = (\mu_0 / 4\pi r) \, d\mathbf{p}(t-r/C) / dt$$

Le potentiel scalaire est:

$$V = -1 / (4\pi \epsilon_0 r) \, \text{div} \, \mathbf{p}(t-r/C)$$

d'où l'on tire les champs électriques et magnétiques rayonnées à grande distance par les relations

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}(V) - \partial \mathbf{A} / \partial t$$

On utilisera les formules d'analyse vectorielle connues. En particulier, si f est une fonction de l'espace et du temps, et si $\mathbf{u}$ est un vecteur fixe dans l'espace:

$$\text{div}(\mathbf{f}\mathbf{u}) = f \, \text{div} \, \mathbf{u} + \text{grad}(f) \cdot \mathbf{u} = \text{grad}(f) \cdot \mathbf{u}$$

$$\text{rot}(\mathbf{f}\mathbf{u}) = f \, \text{rot} \, \mathbf{u} + \text{grad}(f) \wedge \mathbf{u} = \text{grad}(f) \wedge \mathbf{u}$$

a) Rayonnement sur Oz du dipôle $\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ dans la direction $\mathbf{OM} = z \mathbf{e}_z$

Sur Oz, avec des fonctions en $f(z,t) = \cos[\omega(t-z/C)]$, il faut faire très attention parce que

$$\partial f / \partial t = -\omega \sin[\omega(t-z/C)],$$

$$\text{et dans le gradient, } \partial f / \partial z = \omega/C \sin[\omega(t-z/C)]$$

On trouve $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0$ vecteur de Poynting nul.

Le dipôle $\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ ne rayonne donc pas sur l'axe Oz.

b) Rayonnement sur Oz du dipôle $\mathbf{p}_0 = p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$ dans la direction $\mathbf{OM} = z \mathbf{e}_z$

On trouve tous calculs faits: $V = 0$, donc

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi z) p_0 [\cos(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_x + \sin(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_y] = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi z) \mathbf{p}_0(t-r/C)$$

dont la norme est constante. C'est une polarisation circulaire dans le plan xOy. $\mathbf{E} \parallel \mathbf{p}_0$.

$$\text{et } \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = (\mu_0 p_0 \omega^2 / 4\pi z C) [-\sin(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_x + \cos(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_y] = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi z C) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{p}_0$$

dont la norme est aussi constante. C'est une polarisation circulaire dans le plan xOy. $\mathbf{B} \perp \mathbf{p}_0$.

On a $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E} / C$, c'est la structure d'une onde plane.

Le vecteur de Poynting est $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 = \mathbf{E}^2 / \mu_0 C \mathbf{e}_z$, et la polarisation est circulaire droite ou gauche (selon que $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ et $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$) dans le plan xOy.

c) Rayonnement dans le plan xOy du dipôle $\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ dans la direction définie par $\mathbf{OM} = r \mathbf{e}_r$

Dans le plan xOy, en coordonnées polaires (r, θ) , avec des fonctions en $f(r,t) = \cos[\omega(t-r/C)]$, il faut faire de nouveau très attention parce que

$$\partial f / \partial t = -\omega \sin[\omega(t-r/C)], \text{ et dans le gradient, } \partial f / \partial r = \omega/C \sin[\omega(t-r/C)]$$

On trouve tous calculs faits: $V = 0$, donc

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi r) p_1 \cos(\omega_0(t-r/C)) \mathbf{e}_z$$

C'est donc une polarisation linéaire selon l'axe Oz.

et $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = -(\mu_0 \omega^2 / 4\pi r C) p_1 \cos(\omega_0 (t-r/C)) \mathbf{e}_\theta$
 C'est donc une polarisation linéaire orthoradiale dans le plan xOy.

On a $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E} / C$, c'est la structure d'une onde plane.

Le vecteur de Poynting est $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 = \mu_0 (\omega^2 p_1 / 4\pi r C)^2 \cos^2(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_r$, $\mathbf{P}$ est radial et la polarisation est linéaire pour les deux vibrations possibles $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ et $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$.

d) Rayonnement dans le plan xOy du dipôle $\mathbf{p}_0 = p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$ dans la direction définie par $\text{OM} = r \mathbf{e}_r$

$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \partial \mathbf{A} / \partial t = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi r) p_0 \sin(\omega(t-r/C) - \theta) \mathbf{e}_\theta$
 C'est une polarisation linéaire orthoradiale.

$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi r) p_0 \sin(\omega(t-r/C) - \theta) \mathbf{e}_z$
 C'est une polarisation linéaire selon l'axe Oz.
 On a $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E} / C$, c'est la structure d'une onde plane.

Le vecteur de Poynting est $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 = \mu_0 (\omega^2 p_0 / 4\pi r C)^2 \sin^2(\omega(t-r/C) - \theta) \mathbf{e}_r$, $\mathbf{P}$ est radial et la polarisation est linéaire pour les deux vibrations possibles $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ et $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$.

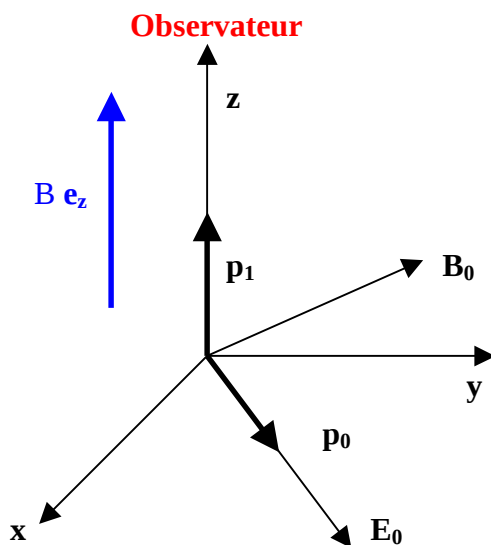
e) conclusion générale sur la polarisation du rayonnement

Le théorème de superposition permet de sommer les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ associés aux dipôles $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_1$ de l'électron plongé dans un champ magnétique $\mathbf{B} \mathbf{e}_z$ avec $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ ou $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$.

$\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ (direction fixe selon Oz)

et

$\mathbf{p}_0 = p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$ ($\|\mathbf{p}_0\| = \text{cte}$, $\mathbf{p}_0$ tourne à la vitesse angulaire ω dans le plan xOy)

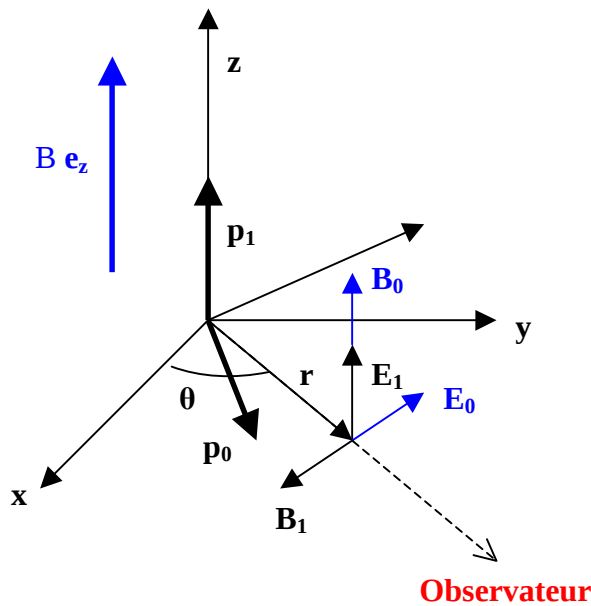


**Observation selon l'axe Oz:
2 polarisations circulaires**

- le dipôle $\mathbf{p}_1$ ne rayonne pas, les champs associés sont nuls
- le dipôle $\mathbf{p}_0$ donne deux polarisations circulaires droite ou gauche aux pulsations $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ ou $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$
- $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ engendrés par $\mathbf{p}_0$ tournent dans le plan xOy (polarisation circulaire)
- Le vecteur de Poynting est // Oz

Quand le champ magnétique est dirigé vers l'observateur (longitudinal), il y a donc 2 composantes polarisées circulairement dans un plan orthogonal au champ dites σ^+ et σ^- .

Quand le champ est orthogonal à la direction de l'observateur (transversal), il y a 3 composantes polarisées linéairement, la composante π et les deux composantes circulaires σ^+ et σ^- qui, vues par la tranche, donnent en réalité deux polarisations linéaires.



Observation dans le plan xOy: 3 polarisations linéaires

- $\mathbf{p}_1$ donne la polarisation linéaire $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ à la pulsation ω_0
- $\mathbf{p}_0$ donne deux polarisations linéaires $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ aux deux pulsations $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ ou $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$
- Dans les 3 cas, le vecteur de Poynting est porté par $\mathbf{e}_r$ donc radial

3 - Paramètres de Stokes

Pour une vibration $\mathbf{E} = (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0) = (E_1, E_2, 0)$, on peut utiliser la notation complexe des OPPH :

$$\mathbf{E} = (E_x e^{i(\omega t - kz)}, E_y e^{i\phi} e^{i(\omega t - kz)}, 0) = (E_1, E_2, 0)$$

On définit 4 paramètres de Stokes (* désigne la quantité conjuguée) par les quantités quadratiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} (E_1 E_1^* + E_2 E_2^*) = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2) \text{ ou } \underline{\text{intensité lumineuse}} \\ Q = \frac{1}{2} (E_1 E_1^* - E_2 E_2^*) = \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2) \\ U = \frac{1}{2} (E_1 E_2^* + E_2 E_1^*) = E_x E_y \cos(\phi) \\ V = \frac{1}{2} i (E_2 E_1^* - E_1 E_2^*) = -E_x E_y \sin(\phi) \end{array} \right.$$

Q, U et V caractérisent l'état de polarisation de la lumière

Un polarimètre délivre une combinaison des paramètres de Stokes I, Q, U et V, quantités quadratiques mesurables permettant de remonter à la nature de la polarisation de la lumière.

Une lumière non polarisée est telle que $Q = U = V = 0$

Une lumière polarisée rectilignement est telle que $V = 0$

Une lumière polarisée circulairement est telle que $Q = U = 0$

Le taux de polarisation circulaire V/I (nombre compris entre -1 et 1) renseigne sur la valeur du champ magnétique longitudinal dans l'effet Zeeman, et son signe (polarités Nord ou Sud).

Le taux de polarisation linéaire $(Q^2 + U^2)^{1/2}/I$ (nombre compris entre 0 et 1) renseigne sur la valeur du champ magnétique transversal dans l'effet Zeeman.

Le rapport Q/I renseigne sur la direction du champ magnétique transversal dans l'effet Zeeman.

Exemple 1: mesure des paramètres I et V avec un polarimètre composé d'un polariseur et d'une lame à retard variable δ orientée à 45° .

On montre que le signal mesuré est $S = \frac{1}{2} [E_x^2 \cos^2(\delta/2) + E_y^2 \sin^2(\delta/2) + E_x E_y \sin(\delta) \sin(\phi)]$

Or $I = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2)$ et $Q = \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2)$ impliquent les relations de réciprocity suivantes:
 $E_x^2 = I + Q$ et $E_y^2 = I - Q$

Comme $V = - E_x E_y \sin(\phi)$, on obtient $S = \frac{1}{2} [\cos^2(\delta/2) (I + Q) + \sin^2(\delta/2) (I - Q) - \sin(\delta) V]$

$$S = \frac{1}{2} [I + \cos(\delta) Q - \sin(\delta) V]$$

Et l'on peut utiliser les combinaisons suivantes donnant accès à I, Q et V:

$$\begin{cases} \delta = -\pi/2, S_1 = \frac{1}{2} [I + V] \\ \delta = -3\pi/2, S_2 = \frac{1}{2} [I - V] \end{cases}$$

A partir des mesures des signaux S_1, S_2 on obtient par somme et différence I et V.

Exemple 2: mesure des paramètres I et V avec un polarimètre composé d'un polariseur et d'une lame à retard quart d'onde ($\delta = -\pi/2$) rotative orientée à $\pm 45^\circ$.

On montre que l'on obtient les signaux suivants pour les orientations successives de 45° et -45° :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 - E_x E_y \sin(\phi)] \\ S_2 &= \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 + E_x E_y \sin(\phi)] \end{aligned}$$

Or $I = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2)$ et $V = - E_x E_y \sin(\phi)$, d'où

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} [I + V] \\ S_2 = \frac{1}{2} [I - V] \end{cases}$$

A partir des mesures des signaux S_1, S_2 on obtient par somme et différence I et V.

4 - Mesure à distance par effet Zeeman du module du champ magnétique B par la mesure des déplacements en longueur d'onde des composantes Zeeman des raies spectrales

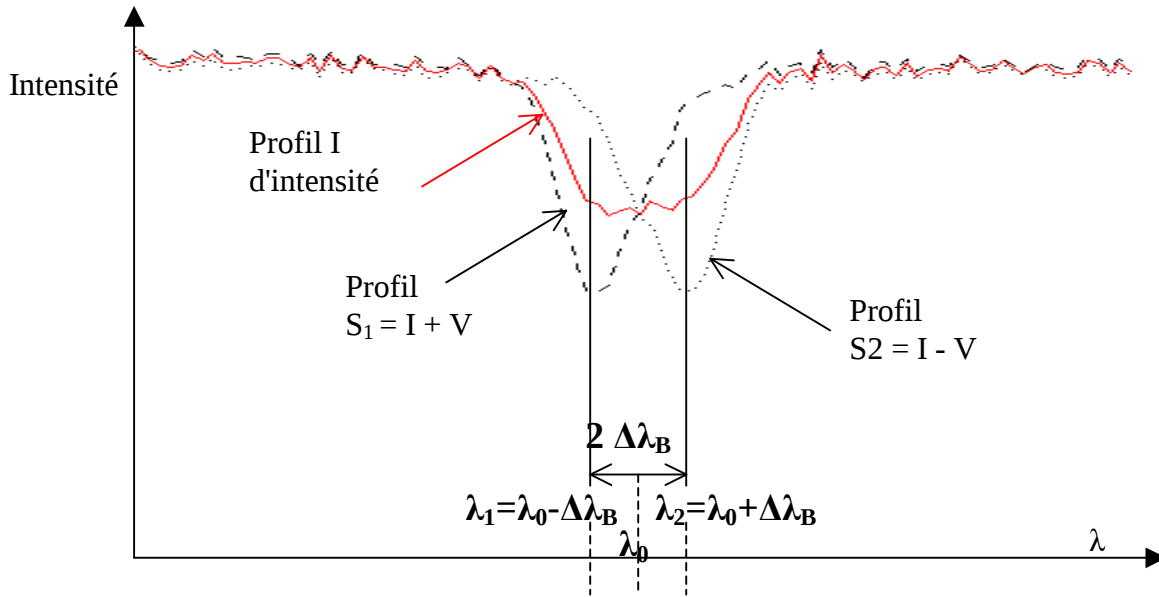
La méthode consiste à repérer l'écartement en longueur d'onde $2 \Delta\lambda_B = \lambda_1 - \lambda_2$ entre les deux signaux $S_1 = I + V$ et $S_2 = I - V$ obtenus par un polarimètre (méthode décrite ci dessus) et injectés dans un spectrographe (pour les décomposer en longueur d'onde).

Dans l'effet Zeeman, les raies spectrales sont dédoublées sous forme de deux composantes S_1 et S_2 de polarisation circulaire droite et gauche et décalées en longueur d'onde de la valeur $\pm \Delta\lambda_B$. Chaque composante se repère en longueur d'onde par la position de la dépression centrale du profil correspondant (λ_1, λ_2).

La théorie de l'effet Zeeman nous donne $\Delta\lambda_B = (\lambda_2 - \lambda_1)/2 = 4.67 \cdot 10^{-13} B g^* \lambda_0^2$

où λ_0 est la longueur d'onde du centre de la raie et g^* son facteur de Landé équivalent.

On en déduit **B module du champ magnétique** (attention : B est en Gauss et λ_0 est en Å dans cette formule).



5 - Mesure à distance par effet Zeeman du champ magnétique longitudinal $B_{//}$ par la mesure du taux de polarisation circulaire des raies spectrales

La méthode consiste à déduire par combinaison linéaire des deux signaux $S_1 = I + V$ et $S_2 = I - V$ obtenus par un polarimètre et injectés dans un spectrographe les profils de Stokes I et V (en fonction de la longueur d'onde). En faisant un développement limité des signaux S_1 et S_2 (décalés respectivement de $+\Delta\lambda_{B//}$ et de $-\Delta\lambda_{B//}$) en fonction de $\Delta\lambda_{B//}$, on obtient:

$$S_1(\lambda) = I_0(\lambda + \Delta\lambda_{B//}) = I_0(\lambda) + \Delta\lambda_{B//} \frac{dI_0}{d\lambda} = I_0(\lambda) + V(\lambda)$$

$$S_2(\lambda) = I_0(\lambda - \Delta\lambda_{B//}) = I_0(\lambda) - \Delta\lambda_{B//} \frac{dI_0}{d\lambda} = I_0(\lambda) - V(\lambda)$$

où $I_0(\lambda)$ désigne le profil non perturbé par le champ magnétique et $V(\lambda) = \Delta\lambda_{B//} \frac{dI_0}{d\lambda}$

On en déduit que :

$$I_0(\lambda) = \frac{1}{2} (S_1(\lambda) + S_2(\lambda))$$

et que :

$$V(\lambda) = \frac{1}{2} (S_1(\lambda) - S_2(\lambda))$$

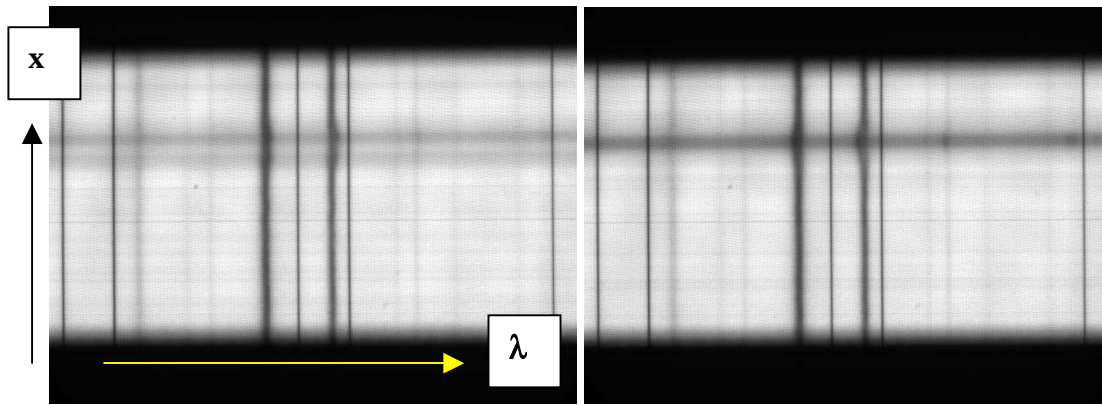
donc finalement

$$V(\lambda)/I_0(\lambda) = (S_1(\lambda) - S_2(\lambda)) / (S_1(\lambda) + S_2(\lambda)) = \Delta\lambda_{B//} (dI_0/d\lambda) / I_0(\lambda)$$

et numériquement, ce taux de polarisation circulaire devient:

$$V/I_0(\lambda) = 4.67 \cdot 10^{-13} B_{//} g^* \lambda_0^2 (1/I_0) (dI_0/d\lambda)$$

formule dans laquelle $B_{//}$ est en Gauss (10^{-4} T) et la longueur d'onde en Å. λ_0 est la longueur d'onde du centre de la raie et g^* son facteur de Landé équivalent, ce sont des valeurs caractéristiques de la raie (données ci dessous).



Images spectrales $I+V(\lambda, x)$ et $I-V(\lambda, x)$, raies solaires FeI 6301 Å et 6302 Å mélangées avec des raies formées dans l'atmosphère terrestre

A partir des signaux $S_1(\lambda)$ et $S_2(\lambda)$, on déduit $I_0(\lambda)$ et $V(\lambda)$; par division on obtient $V(\lambda)/I_0(\lambda)$. Pour estimer aisément $(1/I_0) (dI_0/d\lambda)$, nous supposons que le profil non perturbé par le champ magnétique $I_0(\lambda)$ peut se mettre sous la forme d'une gaussienne, ce qui est une *hypothèse très simplificatrice*:

$$I_0(\lambda) = I_c (1 - r e^{-1/2 ((\lambda - \lambda_0)/\Delta\lambda)^2})$$

Avec **r** **dépression centrale** de la raie (nombre compris entre 0 et 1), **I_c** **intensité du continu** loin du centre de la raie, **λ_0** **longueur d'onde centrale** de la raie, et **$2 \Delta\lambda$** **largeur de la raie aux points d'inflexion du profil**. La dérivée de $I_0(\lambda)$ est maximale (ou minimale) aux points d'inflexion. En ces points particuliers où $\lambda = \lambda_0 \pm \Delta\lambda$, on obtient :

$$dI_0/d\lambda (\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = \pm (I_c r / \Delta\lambda) e^{-1/2}$$

et

$$I_0(\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = I_c (1 - r e^{-1/2})$$

d'où $(1/I_0) dI_0/d\lambda (\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = \pm r e^{-1/2} / ((1 - r e^{-1/2}) \Delta\lambda)$, et l'on en déduit

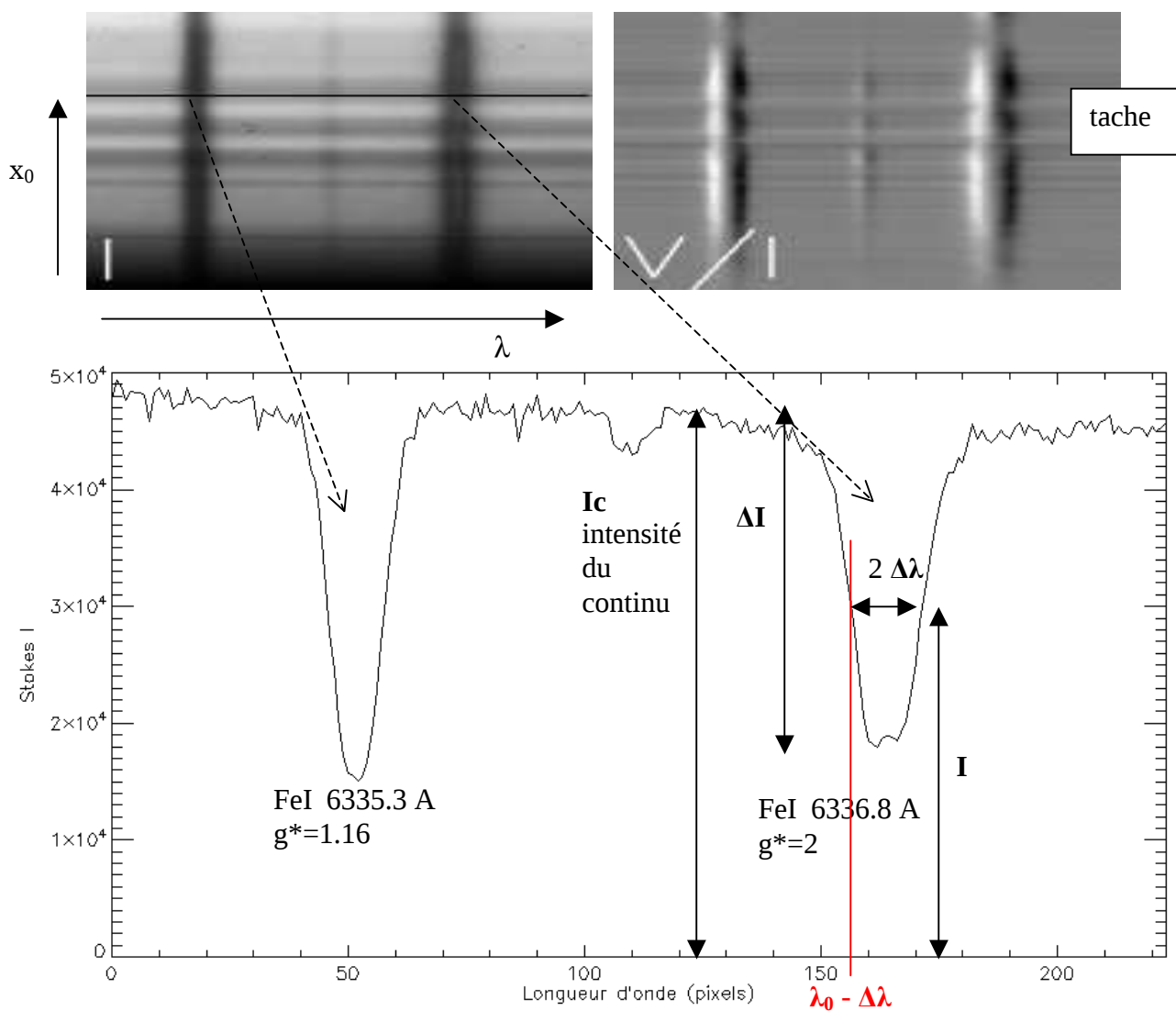
$$V/I (\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = \pm 4.67 \cdot 10^{-13} B_{\parallel} g^* \lambda_0^2 [r e^{-1/2} / ((1 - r e^{-1/2}) \Delta\lambda)]$$

En mesurant la dépression centrale **$r = \Delta I / I_c$** et **$\Delta\lambda$** (demi largeur aux points d'inflexion) sur les profils en intensité **$I_0(\lambda)$** ainsi que le rapport **V/I** au **voisinage d'un des points d'inflexion**, c'est à dire soit **$V/I(\lambda_0 + \Delta\lambda)$** , soit **$V/I(\lambda_0 - \Delta\lambda)$** , on peut en déduire une estimation du champ longitudinal **$B_{\parallel}$** , valeur qui peut être positive ou négative selon que la polarité est Nord ou Sud, c'est à dire sortante du soleil ou entrante.

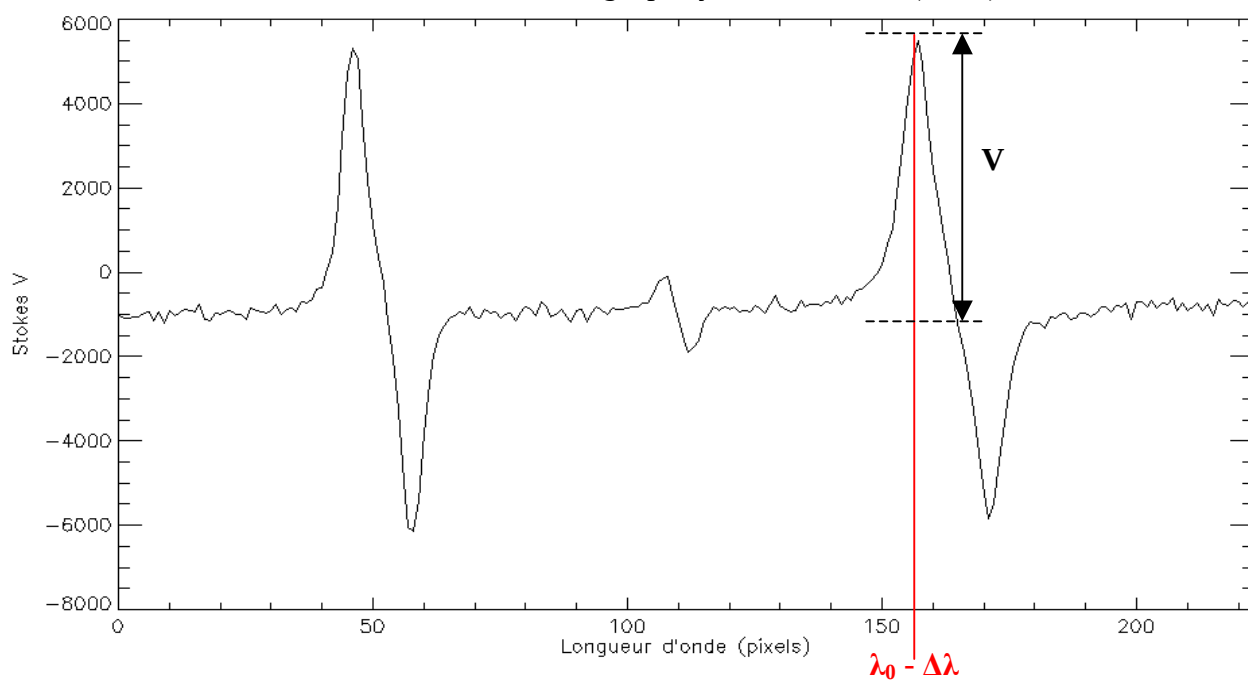
On a donc une procédure simple permettant de mesurer:

- **le module du champ magnétique B** (méthode des déplacements en longueur d'onde des profils $I+V$ et $I-V$)
- **la projection du champ magnétique $B_{\parallel}$ sur la ligne de visée** (mesure du taux de polarisation V/I aux points d'inflexion des profils)

De ces deux mesures, on peut déduire le champ magnétique transverse à la ligne de visée $B_{\perp}$ puisque $B^2 = B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2$, mais il ne sera pas possible de connaître l'orientation du champ transverse. Pour cela, il faudrait étudier la polarisation linéaire.



Profil $I_0(\lambda)$ au point d'abscisse solaire x_0 pour deux raies du Fer observées. On étudie la raie de droite. On mesure sur ce graphique $\Delta \lambda$, I_c , ΔI et $I(\lambda_0 - \Delta \lambda)$.



Profil $V(\lambda)$ au point d'abscisse solaire x_0 pour deux raies du Fer observées. On étudie la raie de droite. On mesure sur ce graphique $V(\lambda_0 - \Delta \lambda)$.

6 - TP d'observation: mesure des champs magnétiques des taches par effet Zeeman

On étudie au spectrographe une raie en polarisation circulaire (raie du Fer par exemple) au dessus d'une tache solaire où le champ magnétique est assez intense (de l'ordre de 0.1 T). Obtenir sur la tache (ombre ou pénombre), deux ensembles d'images spectrales $I+V(\lambda, x)$ et $I-V(\lambda, x)$ en utilisant un polarimètre constitué:

- soit d'une lame quart d'onde statique rotative positionnable à 45° ou -45° de l'axe d'acceptance d'un polariseur
- soit d'un cristal liquide en position fixe à retard variable ($-\pi/2$ ou $-3\pi/2$) orienté à 45° de l'axe d'acceptance d'un polariseur

Les deux méthodes pourront être utilisées successivement pour comparer.

Les observations n'étant pas étalonnées en longueur d'onde, on déterminera la valeur du pixel spectral par comparaison avec un atlas du spectre solaire en ligne (site <http://solaire.obspm.fr>).

a) méthode 1: mesure du module du champ B par l'écartement des profils $I+V(\lambda)$ et $I-V(\lambda)$

On a vu que les profils $I+V(\lambda)$ et $I-V(\lambda)$ en un point donné du soleil sont décalés en longueur d'onde de la valeur $\pm\Delta\lambda_B$. Chaque profil se repère en longueur d'onde par la position de sa dépression centrale (λ_1, λ_2).

La théorie de l'effet Zeeman nous donne $\Delta\lambda_B = (\lambda_2 - \lambda_1)/2 = 4.67 \cdot 10^{-13} B g^* \lambda_0^2$

où λ_0 est la longueur d'onde du centre de la raie et g^* son facteur de Landé équivalent.

Déduire B de la mesure de $\Delta\lambda_B$ (attention : B est en Gauss et λ_0 est en Å dans cette formule).

b) méthode 2: mesure du champ longitudinal B// par le taux de polarisation circulaire V/I aux points d'inflexion

Le signal de sortie des deux polarimètres utilisables est donné dans le cours. Commencer par sommer les images $I+V$ et $I-V$ entre elles. Puis par somme et différence, en déduire $I(\lambda, x)$ et $V(\lambda, x)$.

Choisir **une position particulière x_0 sur la tache**. On obtient alors deux profils spectraux $I(\lambda, x_0)$ et $V(\lambda, x_0)$ ne dépendant que de la longueur d'onde. Tracer $V/I(\lambda, x_0)$ en fonction de la longueur d'onde. En déduire le taux de polarisation circulaire V/I en un point d'inflexion du profil, puis de ce taux, la valeur du champ magnétique longitudinal B// de la tache en utilisant la relation (qui suppose que la raie est gaussienne, voir cours):

$$V/I = 4.67 \cdot 10^{-13} B_{//} g^* \lambda_0^2 [r e^{-1/2} / ((1 - r e^{-1/2}) \Delta\lambda)]$$

où $\Delta\lambda$ est la demi largeur (en Å) de la raie aux points d'inflexion du profil et $r = \Delta I/I_c$ la dépression centrale (nombre compris entre 0 et 1) de la raie, que l'on mesurera. λ_0 est la longueur d'onde centrale de la raie (en Å). g^* est le facteur de Landé équivalent de la raie. Le résultat est exprimé en Gauss (1 Gauss = 10^{-4} T).

Des facteurs de Landé g^* pour des raies intéressantes:

FeI	$\lambda = 6301.5 \text{ Å}$	$g^* = 1.67$	FeI	$\lambda = 6302.5 \text{ Å}$	$g^* = 2.50$
FeI	$\lambda = 5247.1 \text{ Å}$	$g^* = 2.00$	FeI	$\lambda = 5247.6 \text{ Å}$	$g^* = 2.50$
FeI	$\lambda = 5250.2 \text{ Å}$	$g^* = 3.00$	FeI	$\lambda = 6336.8 \text{ Å}$	$g^* = 2.00$
FeI	$\lambda = 6173.3 \text{ Å}$	$g^* = 2.50$	CaI	$\lambda = 6103.0 \text{ Å}$	$g^* = 2.00$

c) De ces deux mesures, déduire pour terminer le champ magnétique transverse à la ligne de visée $B_{\perp}$ par la relation $B^2 = B_{//}^2 + B_{\perp}^2$