Exercice 1. Vecteurs, coordonnées, norme, relation de Chasles

Q1) Soient trois points O, A et B de coordonnées cartésiennes (x_O, y_O), (x_A, y_A) et (x_B, y_B).

a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BA}$.

b) Exprimer la norme de chaque vecteur.

c) Vérifier que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

d) Montrer que dans le cas général $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \neq \left\|\overrightarrow{AO}\right\| + \left\|\overrightarrow{OB}\right\|$

Q2) Soient deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ formant un angle ϕ. Exprimer le produit scalaire $\vec{e}_1.\vec{e}_2$ en fonction des normes des vecteurs et de ϕ.

Q3) On considère un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et un vecteur $\vec{u}$ de norme u_0 et faisant un angle θ avec l'axe (Ox).

a) Faire un schéma représentant $\vec{u}$.

b) Exprimer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère cartésien.

c) Calculer la projection de $\vec{u}$ sur l'axe (Ox).

d) Calculer la projection de $\vec{u}$ sur l'axe (Oy).

e) Calculer la projection de $\vec{u}$ sur l'axe défini par le vecteur $\vec{v}$ qui fait un angle α avec (Ox).

Exercice 2. Position, vitesse et accélération

Q1) Soit un point M de coordonnées (x, y) dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ supposé galiléen.

a) Exprimer :

— le vecteur position $\overrightarrow{OM}$;

— le vecteur vitesse du point M par rapport à O ;

— le vecteur accélération du point M par rapport à O.

b) Mêmes questions en remplaçant le point O par un point A de coordonnées (x_a, y_a) se déplaçant à vitesse constante $\vec{v}_O(A)$ par rapport à O.

Q2) Le fameux gardien de football Zygomar tape dans le ballon.

a) Quel repère est-il judicieux d'utiliser pour décrire la trajectoire du ballon ?

b) Exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées.

c) Exprimer le vecteur vitesse en fonction des coordonnées.

d) Exprimer le vecteur accélération en fonction des coordonnées.

Q3) Zygomar qui s'ennuie dans ses cages a volé le sifflet de l'arbitre et il s'amuse à le faire osciller dans un plan au bout d'une ficelle.

a) Quel repère est-il judicieux d'utiliser pour décrire la trajectoire du sifflet ?

b) Exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées.

c) Exprimer le vecteur vitesse en fonction des coordonnées.

d) Exprimer le vecteur accélération en fonction des coordonnées.

Q4) Les graphiques de la figure 1 représentent des mesures de position à gauche et de vitesse à droite. Associer à chaque graphique de position le graphique de vitesse correspondant.

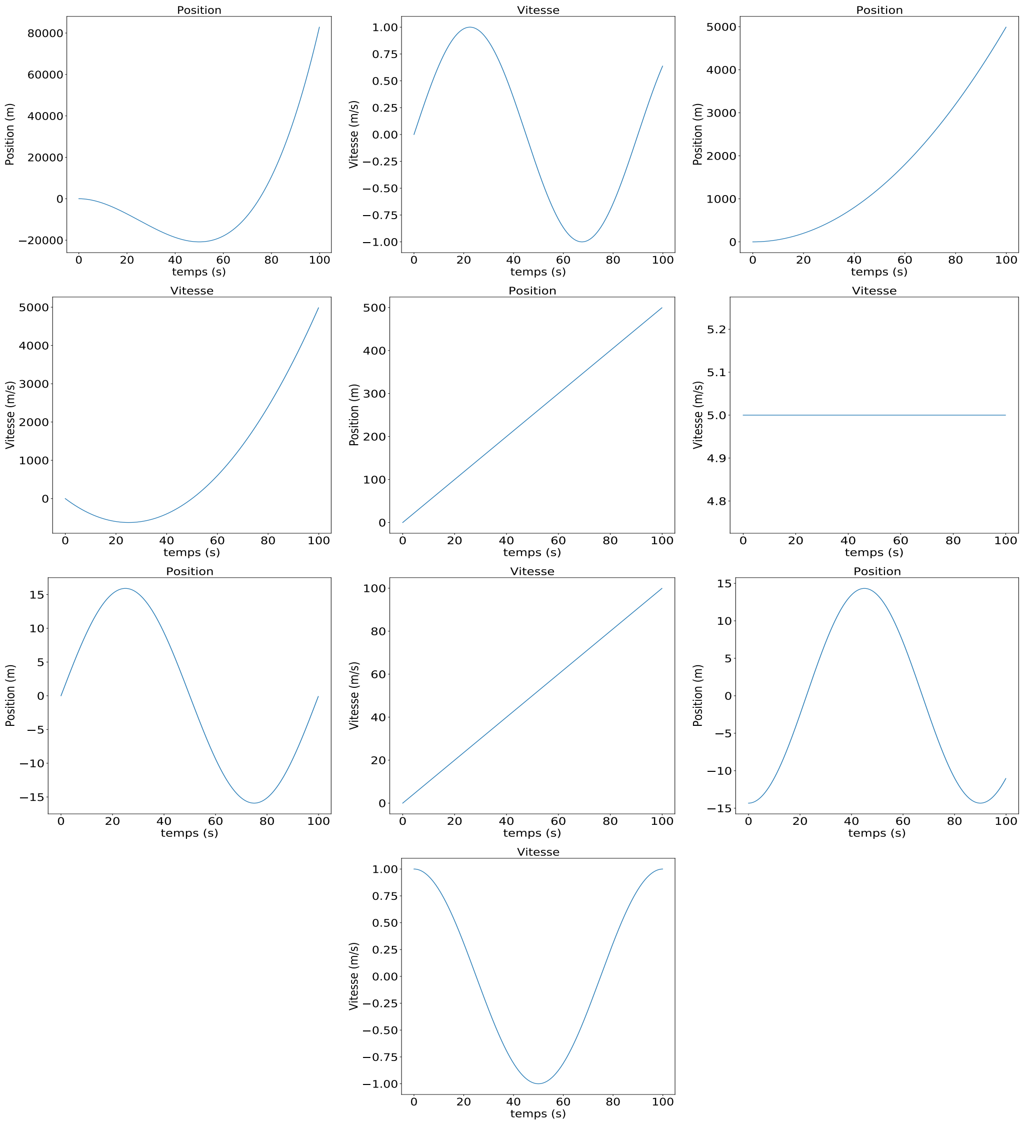

Figure 1. Position (gauche) et vitesse (droite) de différents mobiles.

Q5) Quel système de coordonnées est le plus approprié pour décrire le mouvement :
— du centre de la roue d'un vélo par rapport au sol ;
— du bord d'une roue de vélo par rapport à son axe de rotation ;
— d'une personne marchant de l'avant vers l'arrière d'un train ;
— d'une personne marchant de l'arrière vers l'avant d'un train ;

— d'un pendule par rapport à son support ;
— d'un pendule attaché au plafond d'un train.

Exercice 3. Voitures radio-commandées

Zygomar possède une voiture radio-commandée dont l'accélération est $5,0\,\mathrm{m.s}^{-2}$. Zygomette a un ancien modèle dont l'accélération est $4,0\,\mathrm{m.s}^{-2}$ mais elle a de meilleurs réflexes et fait démarrer sa voiture une seconde avant celle de Zygomar.

Q1) Choisir l'origine des temps et paramétriser l'énoncé.
Q2) Établir l'équation horaire donnant la position de chaque voiture et la représenter graphiquement.
Q3) Au bout de combien de temps la voiture de Zygomar rattrape celle de Zygomette ?
Q4) Zygomar et Zygomette participent à des courses de $100\,\mathrm{m}$ et $200\,\mathrm{m}$. Qui gagne la course de $100\,\mathrm{m}$? Et celle de $200\,\mathrm{m}$?
Q5) Pour les deux courses, calculer la vitesse finale de chacun des véhicules.

Exercice 4. Patineuse

Une patineuse de masse $m = 55\,\mathrm{kg}$ avance sur la piste de glace à vitesse constante $v_0 = 7\,\mathrm{km.h}^{-1}$. À l'instant $t_0 = 0$, elle est poussée par une amie pendant une durée $\Delta t = 3\,\mathrm{s}$ avec une force $F = 10\,\mathrm{N}$. La patineuse ne change ni de direction ni de sens au cours du mouvement.

Q1) Quelle est l'accélération de la patineuse pendant la poussée ?
Q2) Et après la poussée ?
Q3) Exprimer la vitesse de la patineuse à partir de l'instant t_0 jusqu'à $t_1 = t_0 + \Delta t + 10\,\mathrm{s}$.
Q4) Donner la loi horaire de la patineuse de l'instant t_0 à l'instant t_1. Quelle distance la patineuse a parcouru entre t_0 et t_1 ?
Q5) Si l'amie pousse la patineuse dans le sens opposé à son mouvement initial, quelle serait l'équation de la vitesse de la patineuse ? Et sa loi horaire ?

Exercice 5. Avion de chasse

Un avion de chasse de masse $m = 19,5\,\mathrm{t}$ a besoin d'une piste de Δs_1 =900 m pour décoller. Le décollage se produit lorsque l'avion, initialement au repos, atteint la vitesse $v_1 = 250$ km.h^{-1}.

Q1) Supposant que son accélération a_1 est constante et que le mouvement se fait sans frottement, calculer la poussée moyenne F_1 de ses moteurs.
Q2) Si la piste est longue seulement Δs_2 =650 m, quelle serait la poussée moyenne F_2 de moteurs ?
Q3) Calculer pour les deux pistes les temps d'accélération sur la piste.

Dans la suite on ne considère que la piste de longueur Δs_1.
Après le décollage l'avion commence une phase de montée à accélération constante $a_3 \sim 3.1\,\mathrm{m.s^{-2}}$ faisant un angle de $\theta_3 = 30°$ avec le sol, jusqu'à atteindre l'altitude $h_3 = 10$ km par rapport à la piste (condition dite de " haute altitude "). On suppose que le vecteur vitesse (horizontal juste avant le décollage) est dirigé selon l'angle θ_3 juste après le décollage.
Q4) Calculer la vitesse v_3 de l'avion une fois atteinte la condition de haute altitude
Q5) Calculer la distance Δs_3 à l'horizontal de l'avion par rapport au bout de la piste toujours une fois atteinte la condition de haute altitude.

Exercice 6. Plans inclinés

Un mobile de masse m est lâché à l'altitude $z = H$ et sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le plan incliné s'arrête en ($x = 0$, $z = 0$) et il se poursuit par un plan horizontal. On négligera les frottements.
1. Faire un schéma clair indiquant toutes les valeurs importantes.
2. Déterminer l'équation horaire du mobile.
2. Un second plan incliné, faisant un angle β avec l'horizontale, est ajouté en $x = L$. On précise que $L > H/\tan\alpha$. Compléter le chéma, puis déterminer les équations horaires du mobile. Comment déterminer son altitude maximale ? Pouvait-on anticiper ce résultat ?

Exercice 7. Descente à ski

Un skieur se trouve en haut d'une piste de ski (point A sur la figure) ; il démarre sans vitesse initiale. La piste est composée de quatre parties (figure 2) :
— A à B : piste de longueur L_1 et d'angle θ avec l'horizontale ;
— B à C : piste horizontale de longueur L_2 ;
— C à D : piste de longueur L_3 et d'angle α avec l'horizontale.
On utilisera ces valeurs pour les applications numériques : $L_1 = 100\,\mathrm{m}$; $L_2 = 25\,\mathrm{m}$; $\theta = 45\,°$; $\alpha = 60\,°$.

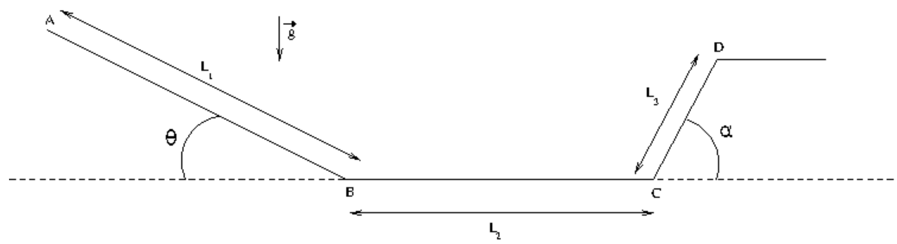

Figure 2. Piste de ski.

Partie A
La piste est verglacée et on néglige les frottements.

1. Donner l'expression littérale de la norme de la vitesse du skieur au point B. Faire l'application numérique.

2. Donner l'expression littérale de la norme de la vitesse su skieur au point C. Faire l'application numérique.

3. Quelle doit être la longueur L_3 pour que le skieur arrive au moins au point D ? Donner l'expression littérale et faire l'application numérique.

Partie B
Le lendemain, la neige est collante et on peut lui associer un coefficient de frottement solide $f = 0,6$.

4. Établir l'expression de la norme de la vitesse en B. Faire l'application numérique.

5. Établir l'expression de la vitesse $\vec{v}_C$ en C. Faire l'application numérique.

6. Quelle doit être la longueur L_3 pour que le skieur arrive au moins au point D ? Donner l'expression littérale et faire l'application numérique.

7. Comparer les valeurs de la partie A à celles de la partie B et commenter.

Exercice 8. Chute libre avec frottements fluides

Un objet de masse m est lâché sans vitesse initiale. Il est soumis à son poids et à une force de frottement $\vec{F}$, que l'on suppose à tout instant proportionnelle et opposée au vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'objet.

1. Utilisez l'énoncé pour exprimer la force de frottement ; quelles sont les dimensions et le signe de la constante de proportionnalité ?

2. Établissez les équations satisfaites par les composantes cartésiennes du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$.

3. On considère la fonction f telle que $f(t) = A + B\exp(-t/\tau)$ où A, B et τ sont des constantes. Vérifiez qu'elle possède la propriété suivante, quel que soit t : $\tau f'(t) + f(t) = A$. Exploitez ce résultat pour exprimer les composantes cartésiennes du vecteur vitesse à tout instant. En déduire les équations horaires du mouvement.

4. Pour $t \to +\infty$, que devient le vecteur vitesse ? Esquissez le graphe de sa composante verticale en fonction du temps, précisez la pente de la tangente à l'origine. Sur la même figure, représentez le résultat qu'on aurait obtenu s'il n'y avait pas eu de frottements.

Exercice 9. Pendule simple

Un objet ponctuel A de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur L dont l'autre extrémité O est fixe. On repère A par l'angle θ entre le fil et la verticale. On suppose que le référentiel terrestre est galiléen. On néglige les frottements autour de l'axe de rotation. On désigne par $\vec{g} = g\vec{e}_x$ l'accélération du champ de pesanteur.

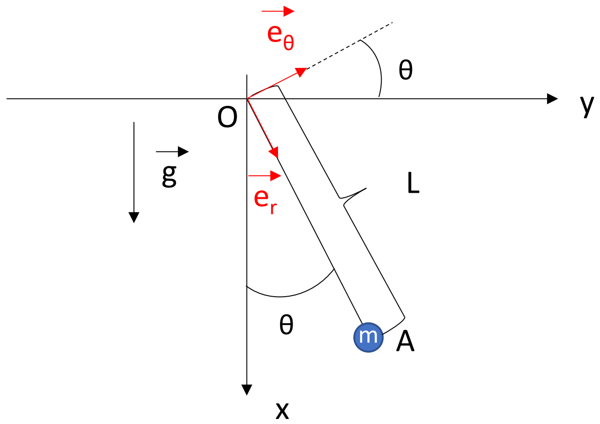

Figure 3. Pendule simple

Q1) Définir la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Expliquer l'intérêt d'utiliser la base polaire pour traiter le problème du pendule.

Q2) Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le système {masse m en A}.

Q3) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point A. Le projeter sur la base polaire et obtenir deux équations. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de A.

Q4) Quelle hypothèse peut-on faire pour simplifier cette équation et obtenir $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,\theta = 0$, avec ω_0 une constante que vous préciserez ? Donnez alors la forme de la solution $\theta(t)$, et représentez-la graphiquement.

Q5) Quelle est l'expression de la période de $\theta(t)$ et sa valeur pour un fil de 50 cm ? Quelle est l'amplitude de $\theta(t)$ si le pendule est lâché sans vitesse initiale, à une position telle que $y_A(0) = 5$ cm ?

Q6) En utilisant une calculatrice (ou un ordinateur), déterminez pour quelles valeurs de θ on peut faire l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ en commettant une erreur relative inférieure à 10%. Et à 5% ?

Exercice 10. Coordonnées polaires, force radiale

1. Sur un schéma, choisir une origine O et placer un point M quelconque dans le plan. Indiquez ses coordonnées polaires (ρ, φ) et représenter la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ et la base cartésienne cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

2. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base polaire. En déduire l'expression du vecteur vitesse puis du vecteur accélération dans cette base.

3. Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, que deviennent ces expressions ? Et dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ?

4. Donner deux exemples physiques où un objet de masse m est soumis à une force radiale, c'est-à-dire dirigée selon $\pm\vec{e}_\rho$. La trajectoire de cet objet est-elle forcément circulaire ? Si non, peut-elle être circulaire ?

5. Un satellite artificiel décrit une orbite circulaire autour de la Terre à une altitude H du sol. Sa vitesse angulaire est égale à celle de la Terre autour de son axe. Quelle est cette vitesse ? Montrer que cela n'est possible que si le satellite est placé à une altitude H_0 et donner l'expression de H_0.

Exercice 11. Équations horaires et trajectoires

On donne ci-dessous des équations horaires en coordonnées cartésiennes. Pour chaque cas étudié, représenter $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t puis esquissez et décriver en quelques mots la trajectoire parcourue entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

(1) $x(t) = a\,\sin(b\,t + c)$, $y(t) = a\,\cos(b\,t + c)$

(2) $x(t) = a_1\,\cos(b\,t)$, $y(t) = a_2\,\sin(b\,t)$

(3) $x(t) = a\,\sin(b\,t - \pi/4)$, $y(t) = -a\,\sin(b\,t - \pi/4)$

(4) $x(t) = a\,t\,\cos(b\,t)$, $y(t) = a\,t\,\sin(b\,t)$